# Les vitesses en Relativité restreinte

JP Chabert

## Table des matières

# 1 Introduction

La notion de vitesse est au cœur de la Relativité restreinte.

C'est d'ailleurs le paradoxe de la vitesse de la lumière qui a conduit Einstein à proposer sa théorie.

Rappelons brièvement l'histoire, pour ceux qui l'ignoreraient.

Evaluée pour la première fois par Ole Romer en 1666, grâce à l'observation des satellites de Jupiter, puis précisée par Michelson (1879), la vitesse de la lumière est proche de 300 000 km/s. Mais par rapport à quoi ?

Si la lumière se déplace à 300 000 km/s dans le vide (par rapport à un "éther" imaginaire), et si la Terre tourne autour du Soleil à 30 km/s, il est légitime de penser que les rayons lumineux de sens opposé à celui de la Terre (ceux qui viennent à notre rencontre) se déplacent à 300 000 + 30 = 300 030 km/s par rapport à nous, tandis que les rayons de même sens que la Terre (ceux qui nous rattrapent) se déplacent à 300 000 - 30 = 299 970 km/s par rapport à nous.
Cette différence de 60 km/s doit pouvoir être mesurée.
Et si on ne trouve pas 60 km/s, c'est que d'autres éléments entrent en jeu : la vitesse du système solaire par rapport au centre de la galaxie, la vitesse du centre galactique par rapport au groupe local, etc.

Les célèbres expériences de Michelson (1881), puis Michelson et Morley (1887), basées sur un ingénieux système d'interférences, allaient trancher définitivement.
Et le résultat fut à la fois incroyable et indiscutable : la vitesse de la lumière par rapport à la Terre est toujours la même, dans toutes les directions, à toute heure et en toutes saisons ...

Pour résoudre ce paradoxe, une idée audacieuse était nécessaire ; c'est Einstein qui la proposa.

Cette idée, c'est que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs se déplaçant les uns par rapport aux autres à vitesse constante ; ceci

est possible si ces observateurs appréhendent l'espace et le temps de manière différente, chacun ayant ses propres critères pour évaluer les distances et les durées . C'est une idée d'une richesse incroyable : il suffit de tirer le fil, pour voir surgir toute la théorie de la Relativité.

Nous allons aborder ici certains aspects, très fragmentaires, de cette théorie ; pour ceux qui souhaiteraient avoir un aperçu plus complet, citons, par exemple, les liens suivants :

http ://www.sciences.ch/htmlfr/cosmologie/cosmorelativisteres01.php
http ://www.sciences.ch/htmlfr/cosmologie/cosmorelativistegen01.php.

http ://www.futura-sciences.com/comprendre/d/dossier509-1.php
http ://www.futura-sciences.com/comprendre/d/dossier510-1.php

http ://www.linternaute.com/science/espace/dossiers/06/trou-noir/

## 2 La transformation de Lorentz

Plaçons-nous pour commencer dans un espace à une dimension (sur une droite) ; un observateur repèrera un événement quelconque par sa coordonnée spatiale (l'abscisse x du lieu où se produit l'événement) et par sa coordonnée temporelle (l'instant t).

Si un autre observateur, se déplaçant à la vitesse v par rapport au premier, observe le même événement, il lui attribuera d'autres coordonnées : x' et t'.

On suppose que les deux observateurs se sont mis d'accord sur l'origine du repère : si x=0 et t=0, alors x'=0 et t'=0. On suppose de plus que les coordonnées (x', t') s'obtiennent à partir de (x, t) de la manière la plus simple possible, à savoir par une transformation linéaire, et que cette transformation est symétrique : les mêmes formules doivent pouvoir être utilisées aussi bien pour calculer (x', t') en fonction de (x, t), que pour calculer (x, t) en fonction de (x', t') ; seule la vitesse changera de signe.

Nous posons donc :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t \\ t' = \delta x + \gamma t \end{cases}$$

Il faut calculer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$. Pour cela, nous prenons en compte quatre contraintes :

a) Si x = 0 : l'événement considéré est confondu (spatialement) avec le premier observateur, donc, pour le second, il doit vérifier : x' = -v t' (puisque le premier observateur se déplace à la vitesse -v par rapport au second). On a donc :

x' = $\beta$ t, t' = $\gamma$ t, x' = -v t', donc : $\beta$ = -v $\gamma$.

b) Si x' = 0 : l'événement considéré est confondu (spatialement) avec le second observateur, donc, pour le premier, il doit vérifier : x = v t (puisque le second observateur se déplace à la vitesse v par rapport au premier). On a donc :

$\alpha$ x + $\beta$ t = 0 et x = v t, donc $\alpha$ v + $\beta$ = 0, donc $\beta$ = -$\alpha$ v ; ce qui implique que $\alpha = \gamma$.

Notre système devient :

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma v t \\ t' = \delta x + \gamma t \end{cases}$$

c) Si x = c t : cette équation traduit le déplacement d'un rayon lumineux parti du point origine à l'instant t=0 ; la vitesse de la lumière étant la même pour le second observateur, on aura nécessairement x' = c t'. Par conséquent :

x' = $\gamma$ c t - $\gamma$ v t, t' = $\delta$ c t + $\gamma$ t, x' = c t', d'où :

$\gamma$ c t - $\gamma$ v t = $\delta$ $c^2$ t + $\gamma$ c t, donc $\delta$= -$\gamma\frac{v}{c^2}$.

Notre système devient :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(-\frac{vx}{c^2} + t\right) \end{cases}$$

d) Par symétrie, on doit avoir aussi : $x = \gamma(x' + vt')$ et $t = \gamma\left(\frac{vx'}{c^2} + t'\right)$ ; faisons une substitution, par exemple dans la première des équations ci-dessus :

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma\left(\gamma(x' + vt') - v\gamma\left(\frac{vx'}{c^2} + t'\right)\right)$$
$$x' = \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} x' - \gamma^2 vt' = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x',$$

donc $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Finalement, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{-\frac{vx}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Si on se place maintenant dans un espace à trois dimensions (la vitesse v étant toujours supposée parallèle à l'axe des x), on peut écrire :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(-\frac{vx}{c^2} + t\right) \end{cases}$$

où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Ces formules célèbres, connues sous le nom de "transformation de Lorentz", nous propulsent d'emblée au cœur de la Relativité ; elles ont eu un retentissement considérable sur l'ensemble de la physique : non seulement sur la conception de l'espace et du temps, mais aussi, entre autres, dans les domaines de l'électromagnétisme de Maxwell ou de l'énergie des atomes, où ce nouvel éclairage a apporté des simplifications spectaculaires.

On doit bien garder à l'esprit que la transformation de Lorentz n'est rien d'autre qu'un ensemble de formules de changement de repère : elle décrit le changement de "perspective" (ou de "point de vue") quand on passe d'un système inertiel (ou galiléen) à un autre. Ces systèmes inertiels sont des systèmes de coordonnées spatio-temporelles se déplaçant les uns par rapport aux autres à vitesse rectiligne et uniforme.

La transformation de Lorentz n'est pas censée décrire le passage d'un système inertiel à un système accéléré, ou en rotation. On peut s'en convaincre facilement :

- Imaginons un système inertiel associé à deux observateurs A et B ; on pourra supposer que leur vitesse est nulle. Ils observent, par exemple, un point P immobile, situé à la distance x (dans leur repère commun). Supposons que l'observateur B accélère en direction de P : sa vitesse passe de 0 à $dv$ en un temps très court $dt$, puis se stabilise. Alors, pour B, la distance apparente de P passe de $x$ à $\frac{x}{\sqrt{1-\frac{(dv)^2}{c^2}}}$, ce qui fait une variation : $dx' = x\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(dv)^2}{c^2}}} - 1\right)$ pendant le temps $dt$ ; ce qui donne une vitesse apparente $\frac{dx'}{dt'}$, qu'on peut calculer précisément en partant de la transformation de Lorentz, puis en dérivant $x'$ et $t'$ par rapport à t (attention : $x$ est supposé constant, mais $v$ est variable). Il est facile de choisir $x$, $dv$ et $dt$ de telle sorte que cette vitesse apparente soit égale ou supérieure à $c$. Mais la vitesse apparente n'est qu'une illusion !

- Imaginons maintenant que l'obsevateur B se mette à tourner sur lui-même, avec le repère qui lui est associé, à la vitesse angulaire $\omega$. Alors, dans ce repère, le point P semblera tourner en sens inverse à la vitesse apparente $x\ \omega$. On peut très bien choisir $x$ et $\omega$ de telle sorte que cette vitesse apparente soit égale ou supérieure à $c$.

Une vitesse égale (ou supérieure) à $c$ pour un observateur, nulle pour l'autre ? Ceci semble contredire le postulat selon lequel la vitesse de la lumière se-

rait une constante universelle ! Il faut donc préciser qu'elle est constante par rapport à tous les systèmes inertiels (galiléens). Les repères accélérés ou en rotation produisent des mirages ...

# 3 Contraction des règles et ralentissement des horloges

Imaginons deux observateurs (O et O') en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre ; supposons que le premier dispose d'une règle immobile par rapport à son repère, parallèle à la vitesse relative v, de longueur $\Delta x$. Le second observateur (O') note, à l'instant $t'$, la position apparente des extrémités de cette règle ; il enregistre leur distance $\Delta x'$. On a alors :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\ \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0, \text{ donc } \Delta t = \tfrac{v\ \Delta x}{c^2}\ ;$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\ \Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x - \frac{v^2\ \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x\ (1-\frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ \Delta x.$$

Ceci signifie que la règle paraîtra plus courte pour l'observateur O' que pour O : c'est ce qu'on appelle la contraction des règles en mouvement. Cette illusion vient du fait que O' croit observer les deux extrémités de la règle au même instant ; mais selon le point de vue de O, l'intervalle temporel $\Delta t$ n'est pas nul : la simultanéité est une notion subjective.

Considérons maintenant une horloge liée au repère O ; le premier observateur note successivement deux positions des aiguilles, et note l'écart temporel $\Delta t$. L'horloge est immobile, donc $\Delta x = 0$. L'observateur O', pour les mêmes événements, note l'écart temporel :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\ \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ceci signifie que l'écart temporel va sembler plus long pour O' que pour O. C'est ce qu'on appelle le ralentissement des horloges en mouvement. Cette illusion vient du fait que les deux événements, observés "au même endroit" par O, sont vus "à des endroits différents" par O'.

# 4 La formule relativiste de composition des vitesses colinéaires

Plaçons-nous pour le moment dans un espace à une dimension (sur une droite) ; trois observateurs A, B, C se situent, à l'instant t=0, au point origine (x=0) et se déplacent à vitesse constante. Pour A, le mobile B se déplace à la vitesse $v_1$ (donc pour B, le déplacement de A est décrit par l'équation : $x_1 = -v_1 t$) ; pour B, le mobile C se déplace à la vitesse $v_2$ (équation : $x_2 = v_2 t$). Notons $v_3$ la vitesse de C mesurée par A. En mécanique classique (galiléenne), on aurait : $v_3 = v_1 + v_2$ et $v_2 = v_3 - v_1$. Ce n'est pas le cas en mécanique relativiste. On notera : $v_3 = v_1 \oplus v_2$, et $v_2 = v_3 \ominus v_1$.

Considérons l'ensemble des "points d'espace-temps" (événements) dont les coordonnées ($x_2$, t), dans le repère lié à B, vérifient $x_2 = v_2$ t : c'est la trajectoire de C. Transformons $x_2$ et t par la transformation de Lorentz, pour voir comment apparaît cette trajectoire, vue par A (dont la vitesse par rapport à B est $-v_1$). On obtient :

$x'_2 = \dfrac{x_2 + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$ et $t' = \dfrac{\frac{v_1 x_2}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$.

Remplaçons $x_2$ par $v_2$ t ; il vient :

$x'_2 = \dfrac{v_2 t + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$ et $t' = \dfrac{\frac{v_1 v_2 t}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$.

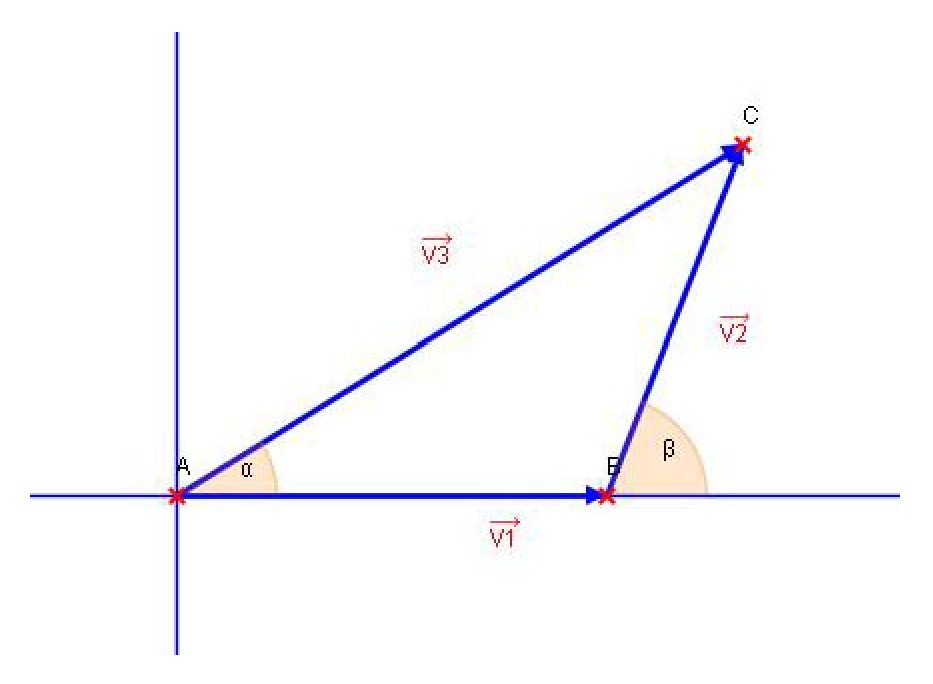
On obtient $v_3$ en divisant $x'_2$ par t' :

$v_1 \oplus v_2 = v_3 = \dfrac{v_1 t + v_2 t}{\frac{v_1 v_2 t}{c^2} + t} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$.

La formule générale de la composition des vitesses colinéaires est donc :

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

# 5 Composition des vitesses non colinéaires




Nous nous plaçons maintenant dans un espace à deux dimensions (plan) ; le mobile B se déplace sur l'axe des abscisses à la vitesse $v_1$ (par rapport à A) ; le mobile C se déplace à la vitesse $v_2$, par rapport à B, et sa direction forme, avec l'axe des abscisses, un angle $\beta$ (selon le point de vue de B).

Donc pour B, la trajectoire de A est caractérisée par : $x_1 = -v_1 t$, $y_1 = 0$ ;

et celle de C est caractérisée par : $x_2 = v_2\ t\ cos\beta$, $y_2 = v_2\ t\ sin\beta$.

Par la transformation de Lorentz, transportons-nous en A, et étudions la trajectoire de C :

$x_2' = \dfrac{x_2 + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$, $y_2' = y_2$ et $t' = \dfrac{\frac{v_1 x_2}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$.

Remplaçons $x_2$ par $v_2\ t\ cos\beta$, et $y_2$ par $v_2\ t\ sin\beta$ :

$x_2' = \dfrac{v_2\ t\ cos\beta + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$, $y_2' = v_2\ t\ sin\beta$, $t' = \dfrac{\frac{v_1 v_2\ t\ cos\beta}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$.

La vitesse de C (observée par A) a une composante $v_{3x}$ parallèle à l'axe des abscisses, et une composante $v_{3y}$ parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\begin{cases} v_{3x} = \frac{x'_2}{t'} = \frac{v_2 \ t \ cos\beta + v_1 t}{\frac{v_1 v_2 \ t \ cos\beta}{c^2} + t} \ ; \\ \\ v_{3y} = \frac{y'_2}{t'} = \frac{v_2 \ t \ sin\beta}{\frac{v_1 v_2 \ t \ cos\beta}{c^2} + t} \ \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{3x} = \frac{v_2 \ cos\beta + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2}} \ ; \\ \\ v_{3y} = \frac{v_2 \ sin\beta}{1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2}} \ \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \end{cases}$$

Calculons le module de $v_3$ :

$$v_3^2 = v_{3x}^2 + v_{3y}^2 = \frac{(v_2 \ cos\beta + v_1)^2 + (v_2 \ sin\beta)^2 (1 - \frac{v_1^2}{c^2})}{(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2})^2}$$

$$v_3^2 = \frac{v_2^2 \ cos^2\beta + 2 v_1 v_2 cos\beta + v_1^2 + v_2^2 sin^2\beta - \frac{v_1^2 v_2^2 sin^2\beta}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2})^2}$$

$$v_3^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 cos\beta - \frac{v_1^2 v_2^2 (1 - cos^2\beta)}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2})^2}$$

$$v_3^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 cos\beta - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2 cos^2\beta}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2})^2}$$

$$v_3^2 = \frac{\left(c + \frac{v_1 v_2 cos\beta}{c}\right)^2 - c^2 + v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2})^2}$$

$$v_3^2 = \frac{c^2 \left(1 + \frac{v_1 v_2 cos\beta}{c^2}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}\right)}{(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2})^2}$$

$$v_3^2 = c^2 - \frac{c^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2}\right)^2}$$

$$v_3 = c\sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \ cos\beta}{c^2}\right)^2}}$$

Appelons $\gamma$ l'angle du triangle ayant pour sommet B (donc le supplémentaire de $\beta$) ; alors :

$$v_3 = c\sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_1 v_2 \ cos\gamma}{c^2}\right)^2}}$$

De même, pour l'angle $\alpha$, par exemple :

$$v_2 = c\sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_3^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_1 v_3 \ cos\alpha}{c^2}\right)^2}}$$

On peut écrire aussi :

$$1-\frac{v_2^2}{c^2}=\frac{\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_3^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v_1v_3\ cos\alpha}{c^2}\right)^2}$$

Cette égalité montre clairement que, si deux des vitesses $v_1$, $v_2$ et $v_3$ sont strictement inférieures à $c$, la troisième l'est aussi.

Dans un but qui apparaîtra plus loin, exprimons encore $cos\alpha$ en fonction des trois vitesses :

$$\left(1-\frac{v_1v_3\ cos\alpha}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_3^2}{c^2}}$$

$$cos\alpha=\frac{c^2}{v_1v_3}\left(1-\frac{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_3^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\right)$$

# 6 Vitesse et rapidité

Revenons à la dimension un (déplacements sur une droite). Composons une vitesse $v$ quelconque avec une vitesse élémentaire $dw$ ; nous obtenons :

$$\frac{v+dw}{1+\frac{vdw}{c^2}}$$

La variation de la vitesse $v$ est alors :

$$dv=\frac{v+dw}{1+\frac{vdw}{c^2}}-v=\frac{v+dw}{1+\frac{vdw}{c^2}}-\frac{v+\frac{v^2dw}{c^2}}{1+\frac{vdw}{c^2}}=\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})dw}{1+\frac{vdw}{c^2}}.$$

Si on fait tendre $dw$ vers 0, le quotient $\frac{dv}{dw}$ tend vers $1-\frac{v^2}{c^2}$, ou, si on préfère : $dw = \dfrac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma$ (pour dv et dw "infiniment petits").

En intégrant, nous obtenons :

$w = c\ Log\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$ (à une constante près, que nous supposons nulle, pour avoir $w$=0 quand $v$=0). Ce qui nous donne la formule fondamentale :

$$\frac{w}{c} = Log\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\frac{v}{c} = th\frac{w}{c}.$$

(La fonction th est la tangente hyperbolique ; nous utiliserons aussi les fonctions ch et sh, qui représentent le cosinus et le sinus hyperboliques. En cas de besoin, on pourra se reporter au petit aide-mémoire qui figure à la fin de cet article.)

Par opposition à la vitesse usuelle ($v$), on donne parfois le nom de "rapidité" à $w$.

Remarquons que $w$ tend vers l'infini quand $v$ tend vers $c$.

Cette "rapidité" peut être utilisée avec profit en mécanique relativiste : nous dirons plus loin quelques mots sur ses liens avec l'impulsion et l'énergie.

L'autre intérêt des rapidités est qu'elles s'additionnent comme en mécanique classique (au moins lorsqu'elles sont colinéaires).

Considérons deux vitesses usuelles (sur une même droite) : $v_1$ et $v_2$, et leur composée : $v = v_1 \oplus v_2 = \dfrac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$. Appelons $w_1$, $w_2$, $w$ les rapidités associées

à $v_1$, $v_2$ et $v$. L'égalité ci-dessus donne :

$$th\frac{w}{c} = \frac{th\frac{w_1}{c} + th\frac{w_2}{c}}{1 + th\frac{w_1}{c} th\frac{w_1}{c}} = th\frac{w_1 + w_2}{c},$$

ce qui entraîne que $w = w_1 + w_2$.

Nous avons dit que $th\frac{w}{c} = \frac{v}{c}$ ; par conséquent :

$$ch\frac{w}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\frac{w}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$sh\frac{w}{c} = th\frac{w}{c}\ ch\frac{w}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Revenons à la transformation de Lorentz, sous sa forme la plus simple (dimension un).

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = x\ ch\frac{w}{c} - ct\ sh\frac{w}{c};$$
$$ct' = c\ \frac{-\frac{vx}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -x\ sh\frac{w}{c} + ct\ ch\frac{w}{c}.$$

Ceci peut s'exprimer simplement par une matrice :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \text{ ou encore :}$$
$$\begin{pmatrix} ct' \\ ix' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & i\ sh\frac{w}{c} \\ -i\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{iw}{c} & sin\frac{iw}{c} \\ -sin\frac{iw}{c} & cos\frac{iw}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \end{pmatrix}.$$

(Rappelons que $cos\ i\phi = ch\ \phi$ et que $sin\ i\phi = i\ sh\ \phi$.)

La dernière matrice présente une ressemblance formelle avec celle d'une rotation, mais avec un angle imaginaire : $\frac{iw}{c}$ ; ne cherchons pas à l'interpréter ; notons seulement que les rotations conservent les longueurs, donc $(ct')^2 + (ix')^2 = (ct)^2 + (ix)^2$, ou $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$ ; notons $s = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$ (ou, si on préfère : $s = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$) ; s estl'invariant de Minkowski (distance d'espace-temps).

Remarquons encore que l'additivité des rapidités est confirmée par l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} ch\frac{w_1}{c} & -sh\frac{w_1}{c} \\ -sh\frac{w_1}{c} & ch\frac{w_1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\frac{w_2}{c} & -sh\frac{w_2}{c} \\ -sh\frac{w_2}{c} & ch\frac{w_2}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w_1+w_2}{c} & -sh\frac{w_1+w_2}{c} \\ -sh\frac{w_1+w_2}{c} & ch\frac{w_1+w_2}{c} \end{pmatrix}$$

Dans un espace de dimension 3 (donc dans l'espace-temps de Minkowski, de dimension 4) la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ ou bien :}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ ix' \\ iy' \\ iz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & i\ sh\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -i\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \\ iy \\ iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{iw}{c} & sin\frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ -sin\frac{iw}{c} & cos\frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \\ iy \\ iz \end{pmatrix},$$

où la vitesse relative des deux observateurs est supposée parallèle à l'axe des x ; l'invariant de Minkowski (conservé par cette transformation) est : $s = \sqrt{c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$.

Nous pouvons exprimer la transformation de Lorentz d'une autre manière encore :

$$ct' + x' = (ct\ ch\frac{w}{c} - x\ sh\frac{w}{c}) + (x\ ch\frac{w}{c} - ct\ sh\frac{w}{c}) = (ct + x)(ch\frac{w}{c} - sh\frac{w}{c})\ ;$$
$$ct' - x' = (ct\ ch\frac{w}{c} - x\ sh\frac{w}{c}) - (x\ ch\frac{w}{c} - ct\ sh\frac{w}{c}) = (ct - x)(ch\frac{w}{c} + sh\frac{w}{c}).$$

Comme $ch\frac{w}{c} - sh\frac{w}{c} = e^{-\frac{w}{c}}$ et $ch\frac{w}{c} + sh\frac{w}{c} = e^{\frac{w}{c}}$, on obtient :

$ct' + x' = (ct + x)e^{-\frac{w}{c}}$ et $ct' - x' = (ct - x)e^{\frac{w}{c}}$ ; en résumé :

$$\begin{pmatrix} ct' - x' \\ ct' + x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{w}{c}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{w}{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct - x \\ ct + x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant étudier la composition des rapidités dans l'espace à deux (ou trois) dimensions.

# 7 La composition des rapidités dans l'espace

Reprenons la formule du cosinus, établie dans la section 5, et remplaçons $\frac{v_i}{c}$ par $th\frac{w_i}{c}$ (i=1, 2, 3).

Remarquons que $\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}} = \sqrt{1-th^2\frac{w_i}{c}} = \frac{1}{ch\frac{w_i}{c}}$. Nous obtenons :

$$cos\alpha = \frac{c^2}{v_1 v_3}\left(1-\frac{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_3^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{th\frac{w_1}{c}th\frac{w_3}{c}}\left(1-\frac{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_3^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\right)$$

$$cos\alpha = \frac{1}{th\frac{w_1}{c}th\frac{w_3}{c}}\left(1-\frac{ch\frac{w_2}{c}}{ch\frac{w_1}{c}ch\frac{w_3}{c}}\right)$$

$$cos\alpha = \frac{ch\frac{w_1}{c}ch\frac{w_3}{c}}{sh\frac{w_1}{c}sh\frac{w_3}{c}}\left(\frac{ch\frac{w_1}{c}ch\frac{w_3}{c}-ch\frac{w_2}{c}}{ch\frac{w_1}{c}ch\frac{w_3}{c}}\right)$$

$$cos\alpha = \frac{ch\frac{w_1}{c}ch\frac{w_3}{c}-ch\frac{w_2}{c}}{sh\frac{w_1}{c}sh\frac{w_3}{c}}$$

Nous reconnaissons ici la "loi des cosinus" (ou théorème d'Al-Kashi) sous sa version hyperbolique. Ceci signifie que si nous voulons représenter les rapidités dans un espace tridimensionnel (l'"espace des rapidités"), cet espace ne peut pas être euclidien : il doit être hyperbolique (à courbure négative constante).

Bien entendu, la formule ci-dessus est valable pour les autres angles du triangle : il suffit de permuter convenablement les mesures des côtés, c'est-à-dire $w_1$, $w_2$ et $w_3$.

# 8 Métrique hyperbolique de l'espace des rapidités

Précisons d'abord le plus clairement possible ce qu'est cet espace des rapidités.

On peut imaginer qu'un observateur (lié à un repère galiléen) mesure les vitesses de différents mobiles par rapport à lui-même ; à chaque mobile, il associe un vecteur vitesse, qu'il peut représenter par un point dans un "diagramme des vitesses" (boule de rayon c dans un espace à 3 dimensions), ou dans un "diagramme des rapidités" (rayon infini). Deux mobiles galiléens ayant la même vitesse sont représentés par un même point. Bien entendu, la rapidité ainsi définie est de même direction que la vitesse correspondante, mais pas de même module, puisque $\frac{v}{c} = th\ \frac{w}{c}$.

On désire définir la notion de distance dans le diagramme des rapidités ; celui-ci deviendra alors un espace métrique, au sens mathématique du terme. Pour cela, on commence par les droites passant par l'origine O. Deux points $A_1$ et $A_2$ situés sur une telle droite représentent les rapidités de deux mobiles $M_1$ et $M_2$ (relatives à O) : $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ (vecteurs colinéaires). On définit les distances de la façon suivante : $OA_1 = \frac{w_1}{c}$, $OA_2 = \frac{w_2}{c}$ et $A_1A_2 = \frac{w_2}{c} - \frac{w_1}{c}$ (en supposant $w_2 > w_1$). Ceci est cohérent en raison de l'additivité des rapidités colinéaires : $w_2 - w_1$ est la rapidité de $M_2$ par rapport à $M_1$, mesurée par $M_1$ (ou $M_2$).

Supposons maintenant que les points $O$, $A_1$ et $A_2$ ne soient pas alignés (autrement dit que $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ ne soient pas colinéaires). Les trois points forment un triangle (trois côtés, trois angles) mais l'observateur initial n'est habilité que pour faire trois mesures : deux longueurs de côtés ($OA_1$ et $OA_2$) et un angle : $A_1\widehat{O}A_2$ ; pour le troisième côté ($A_1A_2$) et les deux autres angles ($O\widehat{A_1}A_2$ et $O\widehat{A_2}A_1$) il doit "demander l'avis" de $M_1$ et $M_2$. Il faut donc faire un changement de repère galiléen, ce qui se fait grâce à la transformation de Lorentz.

On doit bien se rappeler que les côtés des triangles représentent des rapidités relatives, et non des distances spatiales ; la rapidité relative entre deux mobiles doit être mesurée par un observateur lié à l'un ou à l'autre de ces mobiles, ou ayant la même rapidité que l'un d'eux ; les autres observateurs ne sont pas qualifiés pour faire cette mesure. Un observateur est qualifié pour mesurer l'angle entre deux rapidités s'il est qualifié pour mesurer les deux rapidités.

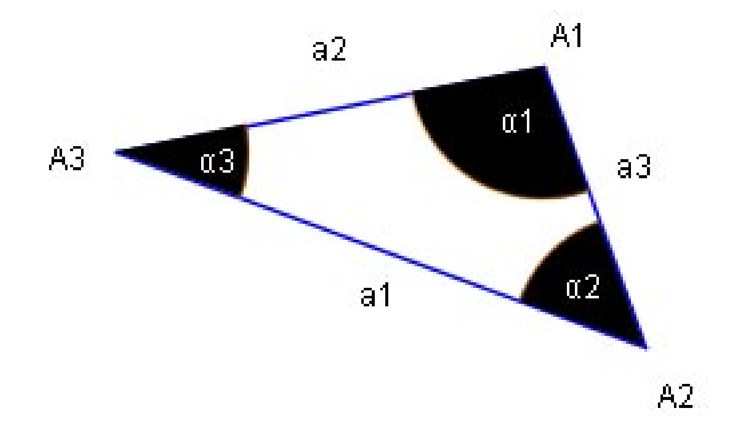
Comme nous l'avons vu dans la section précédente (et également dans la section 5), il est possible, connaissant les mesures des trois côtés d'un triangle, de calculer la mesure d'un angle.

Notons $a_1 = \frac{w_1}{c}$, $a_2 = \frac{w_2}{c}$ et $a_3 = \frac{w_3}{c}$ les mesures des trois côtés, et $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$ les mesures des angles opposés, respectivement, à ces trois côtés. D'après les calculs qui précèdent (et qui se basent, rappelons-le, sur la transformation de Lorentz), on a :

$$cos\alpha_1 = \frac{ch(a_2)\ ch(a_3) - ch(a_1)}{sh(a_2)\ sh(a_3)}$$

$$cos\alpha_2 = \frac{ch(a_3)\ ch(a_1) - ch(a_2)}{sh(a_3)\ sh(a_1)}$$

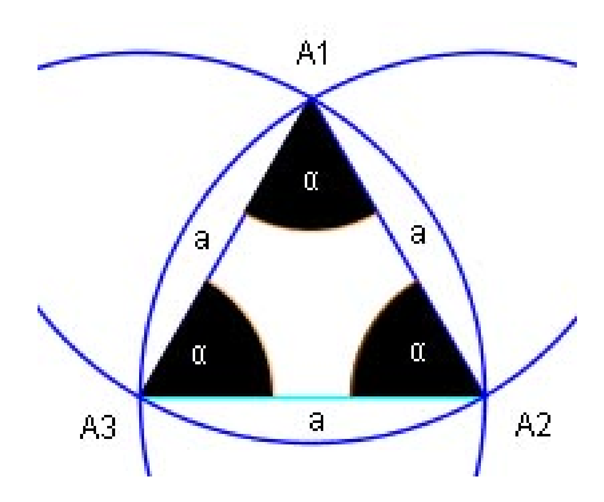
$$cos\alpha_3 = \frac{ch(a_1)\ ch(a_2) - ch(a_3)}{sh(a_1)\ sh(a_2)}$$



Cette formule (écrite ici de trois façons différentes) est appelée : loi des cosinus ou théorème d'Al-Kashi hyperbolique ; elle est caractéristique des espaces hyperboliques (espaces de Lobatchevski, ou espaces de Riemann à courbure négative constante). C'est une clé tout-à-fait remarquable pour pénétrer dans l'univers des espaces hyperboliques : en effet, à partir de cette seule formule, il est possible d'en démontrer une multitude d'autres.

L'une des conséquences de la courbure hyperbolique est que la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180°.

A titre d'exemple, imaginons un triangle équilatéral ayant pour côtés : $a_1 = a_2 = a_3 = a$, et pour angles : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.




$$cos\alpha = \frac{ch^2(a) - ch(a)}{sh^2(a)} = \frac{ch(a)(ch(a) - 1)}{ch^2(a) - 1} = \frac{ch(a)(ch(a) - 1)}{(ch(a) + 1)(ch(a) - 1)}$$

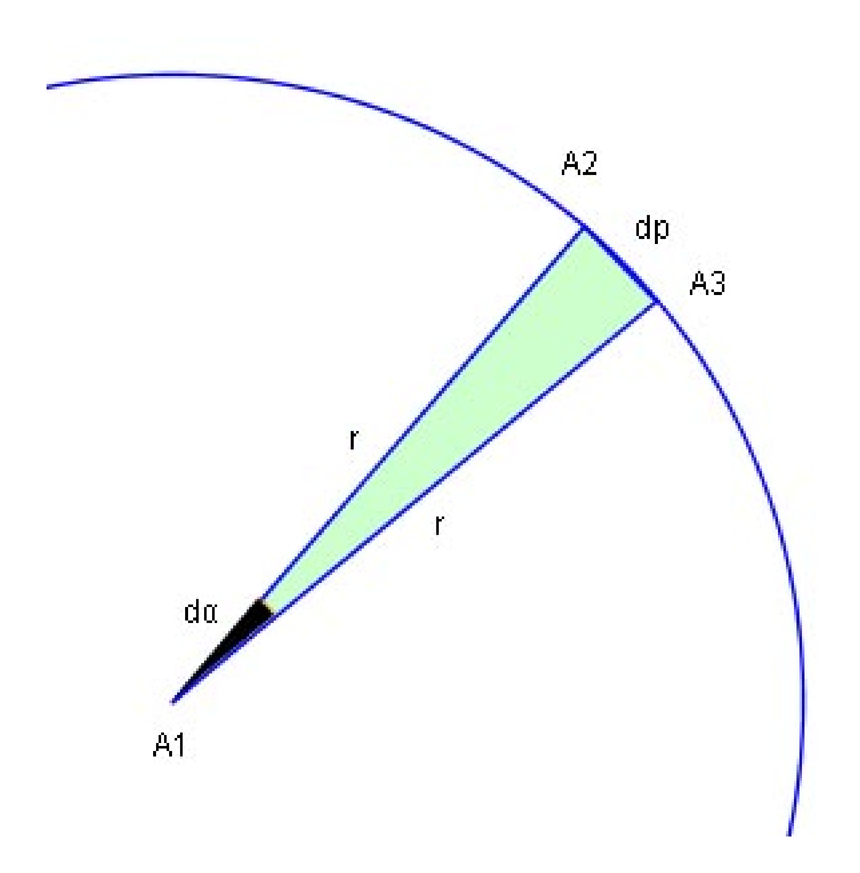
$$cos\alpha = \frac{ch(a)}{ch(a) + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{ch(a)}}$$

Quand $a$ tend vers 0, $ch(a)$ tend vers 1, donc $cos\alpha$ tend vers 0.5, $\alpha$ tend vers 60°, et la somme des angles du triangle tend vers 180°.

Quand $a$ tend vers l'infini, $ch(a)$ tend vers l'infini, donc $cos\alpha$ tend vers 1, $\alpha$ tend vers 0°, et la somme des angles du triangle tend vers 0°.

Une autre particularité des espaces hyperboliques est que le périmètre d'un cercle divisé par son diamètre donne un quotient supérieur à $\pi$.

Considérons un triangle ayant deux côtés égaux : $a_2 = a_3 = r$ (deux rayons d'un même cercle) et un troisième côté "infinitésimal" : $a_1 = dp$. Notons $d\alpha = d\alpha_1$ l'angle (infinitésimal) opposé à $dp$.




$$cos(d\alpha) = \frac{ch^2(r) - ch(dp)}{sh^2(r)}$$

Remplaçons $cos(d\alpha)$ par $1 - \frac{(d\alpha)^2}{2}$ et $ch(dp)$ par $1 + \frac{(dp)^2}{2}$ (développements limités) ; nous obtenons :

$$1 - \frac{(d\alpha)^2}{2} = \frac{ch^2(r) - (1 + \frac{(dp)^2}{2})}{sh^2(r)} = \frac{sh^2(r) - \frac{(dp)^2}{2}}{sh^2(r)} = 1 - \frac{(dp)^2}{2\ sh^2(r)},$$

donc $dp = sh(r)\ d\alpha$.

En intégrant de 0 à $2\pi$, on obtient le périmètre : $p = 2\pi\ sh(r)$.

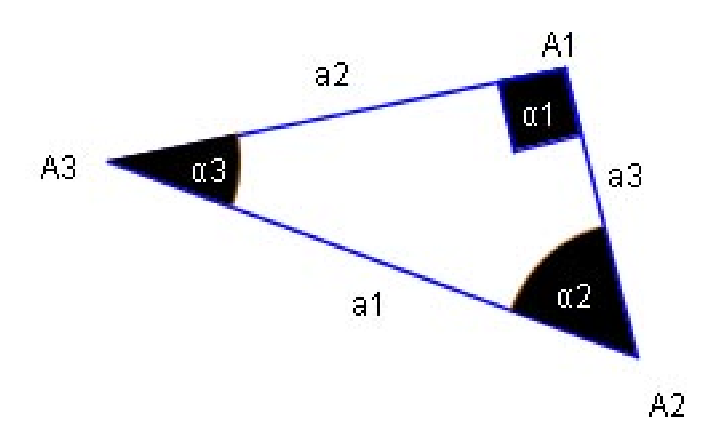
Le quotient du périmètre du cercle par son diamètre est donc égal à $\pi\ \dfrac{sh(r)}{r}$.

Quand $r$ tend vers 0, ce quotient tend vers $\pi$ ; quand $r$ tend vers l'infini, il tend vers l'infini.

Une conséquence importante est la suivante : quand on compose une rapidité $\vec{w}$ avec une rapidité élémentaire $\vec{dw}$ perpendiculaire à $\vec{w}$ (accélération normale), la rapidité $\vec{w}$ tourne d'un angle $d\alpha$ donné par la formule :

$$d\alpha = \frac{dw}{c\ sh\frac{w}{c}}.$$

Appliquons maintenant la loi des cosinus à un triangle rectangle, pour obtenir l'équivalent du théorème de Pythagore en géométrie hyperbolique ; posons $\alpha_1 = 90^\circ$.




On a : $cos\ \alpha_1 = \dfrac{ch(a_2)\ ch(a_3) - ch(a_1)}{sh(a_2)\ sh(a_3)} = 0$, et, par conséquent :

$$ch(a_1) = ch(a_2)\ ch(a_3).$$

Dans un triangle rectangle hyperbolique, le cosinus hyperbolique de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus hyperboliques des deux autres côtés.

Si les côtés du triangle sont suffisamment petits, on peut remplacer $ch(a_1)$, $ch(a_2)$ et $ch(a_3)$ par $1+\frac{a_1^2}{2}$, $1+\frac{a_2^2}{2}$ et $1+\frac{a_3^2}{2}$ (développements limités au second ordre) ; l'égalité devient : $1+\frac{a_1^2}{2} \approx (1+\frac{a_2^2}{2})\,(1+\frac{a_3^2}{2}) \approx 1+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_3^2}{2}$, d'où on tire :
$\frac{a_1^2}{2} \approx \frac{a_2^2}{2}+\frac{a_3^2}{2}$, donc $a_1^2 \approx a_2^2+a_3^2$, ce qui est la forme classique du théorème de Pythagore.

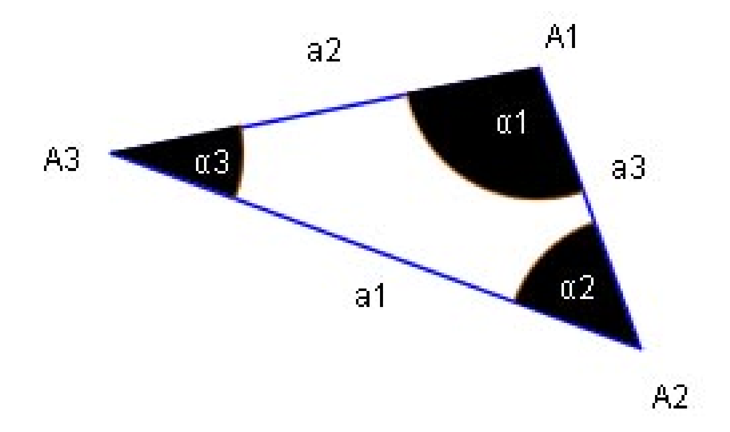
Pour utiliser efficacement l'espace des rapidités, il est important de bien comprendre que ce n'est pas un espace vectoriel (ou affine) : la notion de parallélisme n'y est pas définie comme dans un espace euclidien ; les parallélogrammes n'existent pas ; par conséquent, l'égalité vectorielle et l'addition vectorielle (définie selon la "règle du parallélogramme") n'ont aucun sens. Ce qu'on peut définir, c'est la composition de déplacements. Un déplacement équivaut à un changement d'origine, autrement dit à un changement de repère galiléen. On peut donc considérer que la transformation de Lorentz a pour rôle de définir la notion de déplacement dans l'espace des rapidités.

On peut se demander si le recours aux rapidités ne complique pas les calculs : tout ce qui peut être calculé à l'aide des rapidités peut l'être aussi avec les vitesses, sans faire intervenir un espace hyperbolique. Mais la composition des vitesses, relativement simple en dimension un, se complique beaucoup en dimensions deux ou trois ; le recours aux rapidités peut être alors plus efficace, à condition de posséder la boîte à outils adaptée : un formulaire aussi complet que possible de triangulation hyperbolique.

# 9 Autres formules de trigonométrie hyperbolique

Voici encore quelques formules concernant le triangle quelconque ; toutes peuvent être démontrées à l'aide de la loi des cosinus.

$$\text{Loi des sinus : } \frac{sin(\alpha_1)}{sh(a_1)} = \frac{sin(\alpha_2)}{sh(a_2)} = \frac{sin(\alpha_3)}{sh(a_3)}$$




On peut écrire aussi :

$sin^2(\alpha_1).sh^2(a_2).sh^2(a_3) = sin^2(\alpha_2).sh^2(a_3).sh^2(a_1) = sin^2(\alpha_3).sh^2(a_1).sh^2(a_2)$
$.... = 1 + 2\ ch(a_1).ch(a_2).ch(a_3) - (ch^2(a_1) + ch^2(a_2) + ch^2(a_3))$.

Connaissant les mesures des trois angles d'un triangle, il est possible de calculer les mesures des trois côtés. Ceci peut surprendre, car c'est évidemment impossible en géométrie euclidienne ! On utilisera les formules suivantes :

$ch(a_1) = \frac{cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)+cos(\alpha_1)}{sin(\alpha_2).sin(\alpha_3)}$

$ch(a_2) = \frac{cos(\alpha_3).cos(\alpha_1)+cos(\alpha_2)}{sin(\alpha_3).sin(\alpha_1)}$

$ch(a_3) = \frac{cos(\alpha_1).cos(\alpha_2)+cos(\alpha_3)}{sin(\alpha_1).sin(\alpha_2)}$

Nous dirons que deux formules sont conjuguées si on peut passer de l'une à l'autre en remplaçant $ch(a_n)$ par $-cos(\alpha_n)$, $cos(\alpha_n)$ par $-ch(a_n)$, $sh(a_n)$ par $i\ sin(\alpha_n)$, $sin(\alpha_n)$ par $-i\ sh(a_n)$ (n=1,2,3). On peut vérifier que les trois formules ci-dessus sont les conjuguées des trois formules de base (qui constituent la loi des cosinus). D'autre part, les formules $cos^2(\alpha_n) + sin^2(\alpha_n) = 1$ et $ch^2(a_n) - sh^2(a_n) = 1$ sont aussi conjuguées. Donc si une autre formule, construite à partir de ces briques élémentaires, est vraie, sa conjuguée le sera aussi.

Connaissant un côté et ses deux angles adjacents, on peut calculer l'angle opposé grâce aux formules suivantes, qui découlent directement des précédentes (puis on utilise la loi des sinus pour obtenir les deux autres côtés) :

$cos(\alpha_1) = ch(a_1).sin(\alpha_2).sin(\alpha_3) - cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)$

$cos(\alpha_2) = ch(a_2).sin(\alpha_3).sin(\alpha_1) - cos(\alpha_3).cos(\alpha_1)$

$cos(\alpha_3) = ch(a_3).sin(\alpha_1).sin(\alpha_2) - cos(\alpha_1).cos(\alpha_2)$

On peut remarquer que, si $a_1 \neq 0$, alors $ch(a_1) > 1$, donc :

$cos(\alpha_1) > sin(\alpha_2).sin(\alpha_3) - cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)$

$cos(\alpha_1) > -cos(\alpha_2 + \alpha_3)$

$cos(\alpha_1) > cos(\pi - (\alpha_2 + \alpha_3))$

$\alpha_1 < \pi - (\alpha_2 + \alpha_3)$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$

Ceci prouve que la somme des angles d'un triangle quelconque (à côtés non nuls) est toujours inférieure à $180^{\circ}$.

Connaissant un angle et ses deux côtés adjacents, on peut calculer le côté opposé (puis on utilise la loi des sinus pour obtenir les deux autres angles) :

$ch(a_1) = ch(a_2).ch(a_3) - sh(a_2).sh(a_3).cos(\alpha_1)$

$ch(a_2) = ch(a_3).ch(a_1) - sh(a_3).sh(a_1).cos(\alpha_2)$

$ch(a_3) = ch(a_1).ch(a_2) - sh(a_1).sh(a_2).cos(\alpha_3)$

Connaissant deux côtés et les deux angles opposés, on peut calculer le troisième angle et le troisième côté :

$cos(\alpha_1) = \frac{ch(a_2).ch(a_3).sin(\alpha_2).sin(\alpha_3) - cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)}{sh(a_2).sh(a_3).sin(\alpha_2).sin(\alpha_3) + 1}$

$cos(\alpha_2) = \frac{ch(a_3).ch(a_1).sin(\alpha_3).sin(\alpha_1) - cos(\alpha_3).cos(\alpha_1)}{sh(a_3).sh(a_1).sin(\alpha_3).sin(\alpha_1) + 1}$

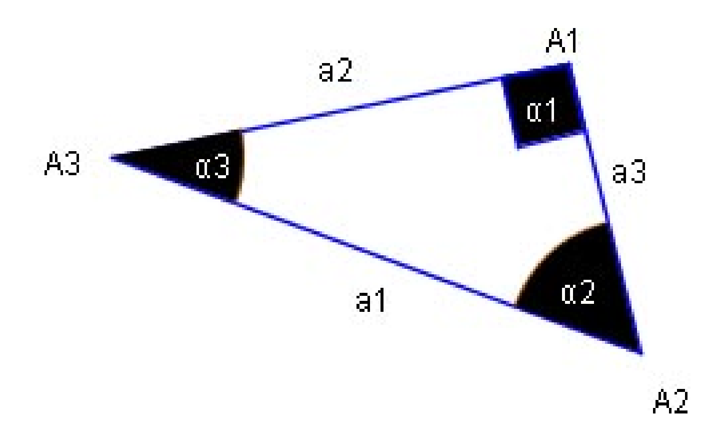
$cos(\alpha_3) = \frac{ch(a_1).ch(a_2).sin(\alpha_1).sin(\alpha_2) - cos(\alpha_1).cos(\alpha_2)}{sh(a_1).sh(a_2).sin(\alpha_1).sin(\alpha_2) + 1}$

$ch(a_1) = \frac{cos(\alpha_2).cos(\alpha_3).sh(a_2).sh(a_3)+ch(a_2).ch(a_3)}{sin(\alpha_2).sin(\alpha_3).sh(a_2).sh(a_3)+1}$

$ch(a_2) = \frac{cos(\alpha_3).cos(\alpha_1).sh(a_3).sh(a_1)+ch(a_3).ch(a_1)}{sin(\alpha_3).sin(\alpha_1).sh(a_3).sh(a_1)+1}$

$ch(a_3) = \frac{cos(\alpha_1).cos(\alpha_2).sh(a_1).sh(a_2)+ch(a_1).ch(a_2)}{sin(\alpha_1).sin(\alpha_2).sh(a_1).sh(a_2)+1}$

Revenons maintenant sur le triangle rectangle ; on supposera que $\alpha_1 = 90^\circ$ ; l'hypoténuse est donc $a_1$. On a déjà vu que $ch(a_1) = ch(a_2).ch(a_3)$.




On peut démontrer de nombreuses autres formules ; en voici quelques-unes.

Calcul des côtés connaissant les angles :

$ch(a_1) = \frac{1}{tan(\alpha_2).tan(\alpha_3)}$

$ch(a_2) = \frac{cos(\alpha_2)}{sin(\alpha_3)}$

$ch(a_3) = \frac{cos(\alpha_3)}{sin(\alpha_2)}$

Calcul des angles connaissant les côtés :

$cos(\alpha_2) = \frac{ch(a_2).sh(a_3)}{sh(a_1)} = \frac{th(a_3)}{th(a_1)}$

$cos(\alpha_3) = \frac{ch(a_3).sh(a_2)}{sh(a_1)} = \frac{th(a_2)}{th(a_1)}$

$sin(\alpha_2) = \frac{sh(a_2)}{sh(a_1)}$

$sin(\alpha_3) = \frac{sh(a_3)}{sh(a_1)}$

$tan(\alpha_2) = \frac{th(a_2)}{sh(a_3)}$

$tan(\alpha_3) = \frac{th(a_3)}{sh(a_2)}$

$cos(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{sh(a_2).sh(a_3)}{ch(a_1)+1}$

$cos(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{sh(a_2).sh(a_3)}{ch(a_1)-1}$

$sin(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{ch(a_2)+ch(a_3)}{ch(a_1)+1}$

$sin(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{ch(a_2)-ch(a_3)}{ch(a_1)-1}$

Liens entre un angle aigu, son côté adjacent et l'hypoténuse :

$ch(a_1) = \frac{ch(a_3).cos(\alpha_2)}{\sqrt{1-ch^2(a_3).sin^2(\alpha_2)}}$

$ch(a_1) = \frac{ch(a_2).cos(\alpha_3)}{\sqrt{1-ch^2(a_2).sin^2(\alpha_3)}}$

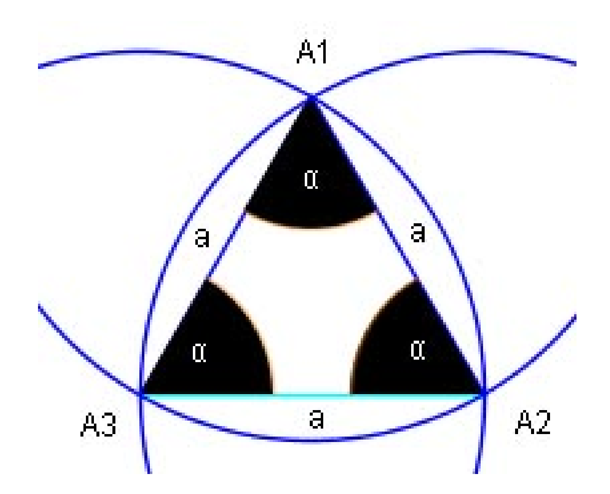
$sh(a_1) = \frac{sh(a_3)}{\sqrt{1-ch^2(a_3).sin^2(\alpha_2)}}$

$sh(a_1) = \frac{sh(a_2)}{\sqrt{1-ch^2(a_2).sin^2(\alpha_3)}}$

Voyons maintenant le cas du triangle équilatéral. Posons : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ et $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

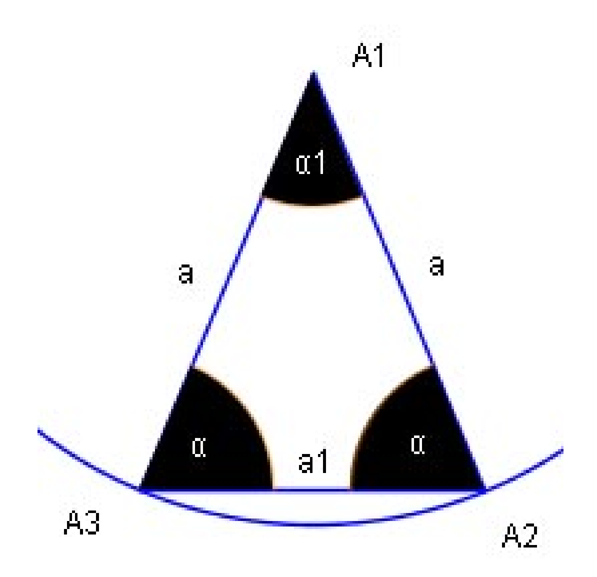
$$cos(\alpha) = \frac{ch(a)}{ch(a)+1}$$

$$ch(a) = \frac{cos(\alpha)}{1 - cos(\alpha)}$$




Remarquons au passage qu'un plan hyperbolique ne peut être pavé avec des triangles équilatéraux (tous semblables) que pour certaines valeurs de $\alpha$ et de $a$ : il doit exister un nombre entier $n$ supérieur à 6 tel que : $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ et $a = argch\left(\frac{cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{1-cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right)$.

Passons au triangle isocèle. On posera : $a_2 = a_3 = a$ et $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.




$cos(\alpha_1) = \frac{ch^2(a)-ch(a_1)}{sh^2(a)}$

$ch(a_1) = \frac{cos(\alpha_1)+cos^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)}$

$cos(\alpha) = \frac{ch(a).(ch(a_1)-1)}{sh(a).sh(a_1)}$

$ch(a) = \frac{cos(\alpha).(cos(\alpha_1)+1)}{sin(\alpha).sin(\alpha_1)}$

$ch(a_1) = \frac{cos^2(\alpha).sh^2(a)+ch^2(a)}{sin^2(\alpha).sh^2(a)+1}$

$cos(\alpha_1) = \frac{ch^2(a).sin^2(\alpha)-cos^2(\alpha)}{sh^2(a).sin^2(\alpha)+1}$

$ch(a_1) = ch^2(a) - sh^2(a).cos(\alpha_1)$

Les formules suivantes seront les plus utiles :

$$tan(\alpha) = \frac{1}{ch(a)}.\sqrt{\frac{1+cos(\alpha_1)}{1-cos(\alpha_1)}}$$

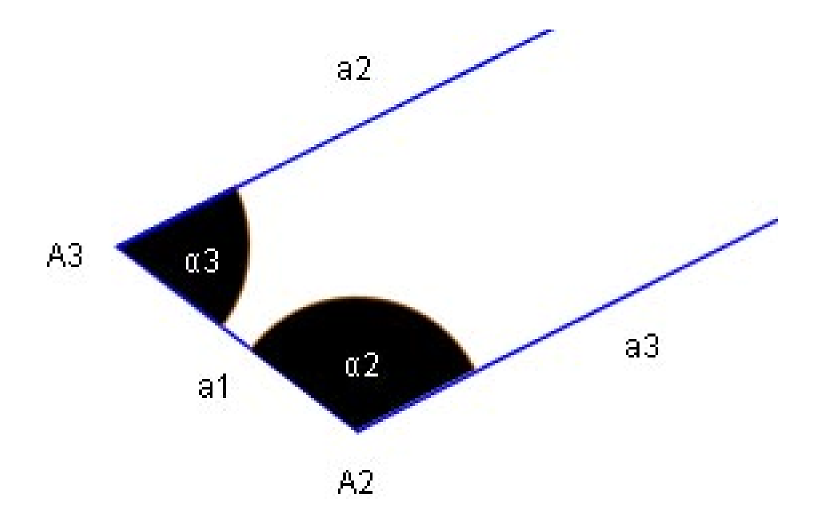
$$th(a) = \frac{1}{cos(\alpha)}.\sqrt{\frac{ch(a_1)-1}{ch(a_1)+1}}$$

Considérons maintenant un type de triangle bien particulier : un triangle dont l'un des sommets (par exemple $A_1$) est "à l'infini". Les points à l'infini se définissent comme en géométrie projective. Nous allons supposer que $A_2$ et $A_3$ sont fixes, et que $A_1$ se déplace sur une demi-droite d'origine $A_2$. L'angle $\alpha_3$ est constant. Si on fait tendre $a_3$ vers l'infini, $a_2$ tend vers l'infini et $\alpha_1$ vers 0.

On étudie ensuite la limite de $\alpha_3$. On obtient :

$$cos(\alpha_3) = \frac{th(a_1) - cos(\alpha_2)}{1 - th(a_1).cos(\alpha_2)}$$

$$cos(\alpha_2) = \frac{th(a_1) - cos(\alpha_3)}{1 - th(a_1).cos(\alpha_3)}$$




$$th(a_1) = \frac{cos(\alpha_2) + cos(\alpha_3)}{1 + cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)}$$

L'importance des points à l'infini est considérable, puisqu'ils représentent la vitesse de la lumière ; les formules ci-dessus nous seront donc très utiles.

Nous allons nous intéresser maintenant au "théorème du cercle circonscrit au triangle rectangle".

Considérons un cercle de centre $O$, de rayon $r$ et de diamètre $[AB]$ ; soit $M$ un point (distinct de $A$ et $B$) appartenant à ce cercle. On sait qu'en géométrie euclidienne, le triangle $(AMB)$ est nécessairement rectangle en $M$. Qu'en est-il en géométrie hyperbolique ?

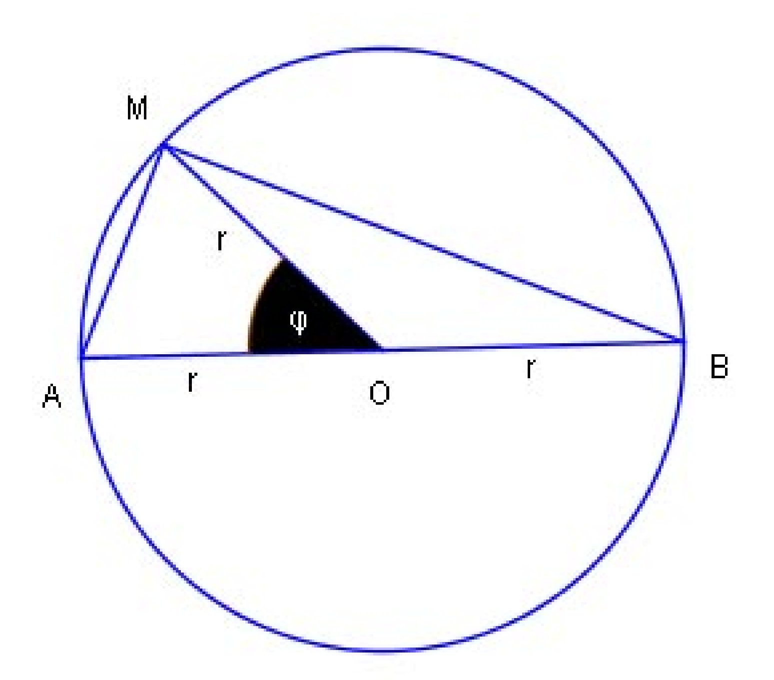
Nous noterons $\phi = \widehat{AOM}$ ; donc $\widehat{MOB} = \pi - \phi$.

Les triangles $(AOM)$ et $(MOB)$ étant isocèles, nous allons leur appliquer la formule de la tangente (vue au paragraphe sur le triangle isocèle).

$tan(\widehat{AMO}) = \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+cos(\phi)}{1-cos(\phi)}}$

$tan(\widehat{MOB}) = \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+cos(\pi-\phi)}{1-cos(\pi-\phi)}} = \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1-cos(\phi)}{1+cos(\phi)}}$

$tan(\widehat{AMB}) = tan(\widehat{AMO} + \widehat{MOB}) = \frac{tan(\widehat{AMO})+tan(\widehat{MOB})}{1-tan(\widehat{AMO}).tan(\widehat{MOB})}$




$$tan(\widehat{AMB}) = \frac{\frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+cos(\phi)}{1-cos(\phi)}} + \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1-cos(\phi)}{1+cos(\phi)}}}{1 - \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+cos(\phi)}{1-cos(\phi)}} \cdot \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1-cos(\phi)}{1+cos(\phi)}}} = \frac{\frac{1}{ch(r)} \cdot \left( \sqrt{\frac{1+cos(\phi)}{1-cos(\phi)}} + \sqrt{\frac{1-cos(\phi)}{1+cos(\phi)}} \right)}{1 - \frac{1}{ch^2(r)}}$$

$$tan(\widehat{AMB}) = \frac{ch(r)}{ch^2(r)-1} \cdot \frac{(1+cos(\phi))+(1-cos(\phi))}{\sqrt{(1-cos(\phi)).(1+cos(\phi))}} = \frac{ch(r)}{sh^2(r)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-cos^2(\phi)}}$$

$$tan(\widehat{AMB}) = \frac{2\ ch(r)}{sh^2(r).sin(\phi)}$$

Supposons $r$ fixé. Si on fait tendre $\phi$ vers 0 ou vers $\pi$, alors $sin(\phi)$ tend vers 0, donc $tan(\widehat{AMB})$ tend vers l'infini, ce qui veut dire que $\widehat{AMB}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ ; sinon, $\widehat{AMB}$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons $\phi$ fixé. Si on fait tendre $r$ vers 0, $\widehat{AMB}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ ; si on fait tendre $r$ vers l'infini, $\widehat{AMB}$ tend vers 0.

Voici encore quelques formules, qui seront moins utiles dans les calculs relativistes, mais qui aident à mieux appréhender les espaces hyperboliques. Pure curiosité ...

Calcul de l'aire d'un disque de rayon $r$ :

Un cercle de rayon $x$ a pour périmètre $2\ \pi\ sh(x)$, donc l'aire d'un disque

de rayon $r$ est :

$$A = \int_0^r 2\ \pi\ sh(x)\ dx = 2\ \pi\ [ch(x)]_0^r = 2\pi(ch(r) - 1)$$

En développant $ch(r)$ en série, on trouve : $A \approx \pi r^2 + \pi \frac{r^4}{12} + ...$

Calcul de l'aire d'une sphère :

Par rapport à un espace euclidien, chaque portion infinitésimale de cercle est multipliée par $\frac{sh(r)}{r}$, et chaque portion de sphère par $\frac{sh^2(r)}{r^2}$, donc l'aire d'une sphère de rayon $r$ est :

$$A = 4\ \pi\ sh^2(r) = 2\pi(ch(2r) - 1)$$

En développant $ch(2r)$ en série, on trouve : $A \approx 4\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^4 + ...$

Volume d'une boule de rayon $r$ :

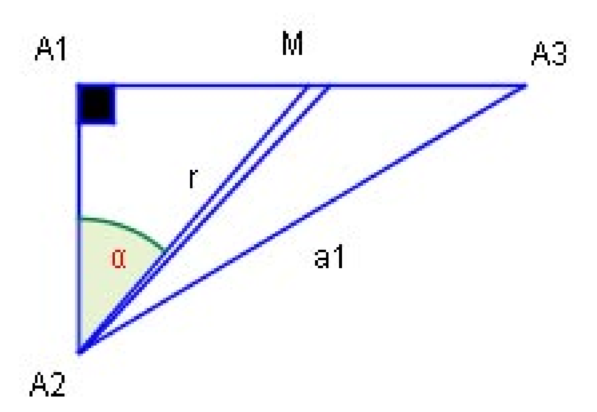
$$V = \int_0^r 4\pi sh^2(x) dx = 4\pi \int_0^r \frac{ch(2x) - 1}{2} dx = 2\pi \left[\frac{sh(2x)}{2} - x\right]_0^r$$

$$V = \pi(sh(2r) - 2r)$$

En développant $sh(2r)$ en série, on obtient : $V \approx \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{15}\pi r^5 + ...$

Nous allons maintenant nous amuser à calculer l'aire d'un triangle rectangle, puis celle d'un triangle quelconque.

Commençons par un triangle $(A_1 A_2 A_3)$ rectangle en $A_1$.




Nous allons le décomposer en secteurs angulaires infinitésimaux, de rayon $r = A_2M$, d'angle $d\alpha$. (Le point $M$ se déplace sur le segment $[A_1A_3]$ ; l'angle $\alpha = A_1\widehat{A_2}M$ varie de 0 à $\alpha_2$.) Nous avons vu précédemment qu'un disque de rayon $r$ a pour aire $A = 2\pi\ (ch(r) - 1)$, donc un secteur angulaire d'angle $d\alpha$ a pour aire $dA = (ch(r) - 1)\ d\alpha$.

Nous avons rencontré aussi la formule qui donne l'hypoténuse d'un triangle rectangle en fonction de l'un des angles aigus et du côté adjacent ; appliquée au triangle $(A_1A_2M)$, elle donne :

$ch(r) = \frac{cos(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{ch^2(a_3)} - sin^2(\alpha)}} = \frac{ch(a_3).cos(\alpha)}{\sqrt{1 - ch^2(a_3).sin^2(\alpha)}}$, donc :

$dA = (ch(r) - 1)\ d\alpha = \left(\frac{ch(a_3).cos(\alpha)}{\sqrt{1 - ch^2(a_3).sin^2(\alpha)}} - 1\right)\ d\alpha$ ;

$dA = (ch(r) - 1)\ d\alpha = \frac{ch(a_3).d(sin(\alpha))}{\sqrt{1 - ch^2(a_3).sin^2(\alpha)}} - d\alpha.$

Posons : $sin(u) = ch(a_3).sin(\alpha)$, autrement dit $u = arcsin(ch(a_3).sin(\alpha))$ ; alors :

$dA = \frac{d(sin(u))}{cos(u)} - d\alpha = du - d\alpha$ ;

$A = \int_{\alpha=0}^{\alpha_2}(du - d\alpha) = arcsin(ch(a_3).sin(\alpha_2)) - \alpha_2.$

Mais nous avons vu (dans le paragraphe sur le triangle rectangle) que $ch(a_3).sin(\alpha_2) = cos(\alpha_3)$, et, comme $cos(\alpha_3) = sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_3)$, il vient :

$A = arcsin(sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_3)) - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_3 - \alpha_2.$

Considérons maintenant un triangle quelconque $(ABC)$, d'angles $\alpha$ , $\beta$ et $\gamma$ ; il suffit de le partager en deux triangles rectangles (en traçant une hauteur) et d'appliquer deux fois la formule ci-dessus, pour obtenir facilement :

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Pour calculer l'aire d'un triangle en géométrie hyperbolique, on calcule la somme de ses angles, et on la soustrait au nombre $\pi$.

Cette formule bien connue est l'une des plus étranges du bestiaire des mathématiques !

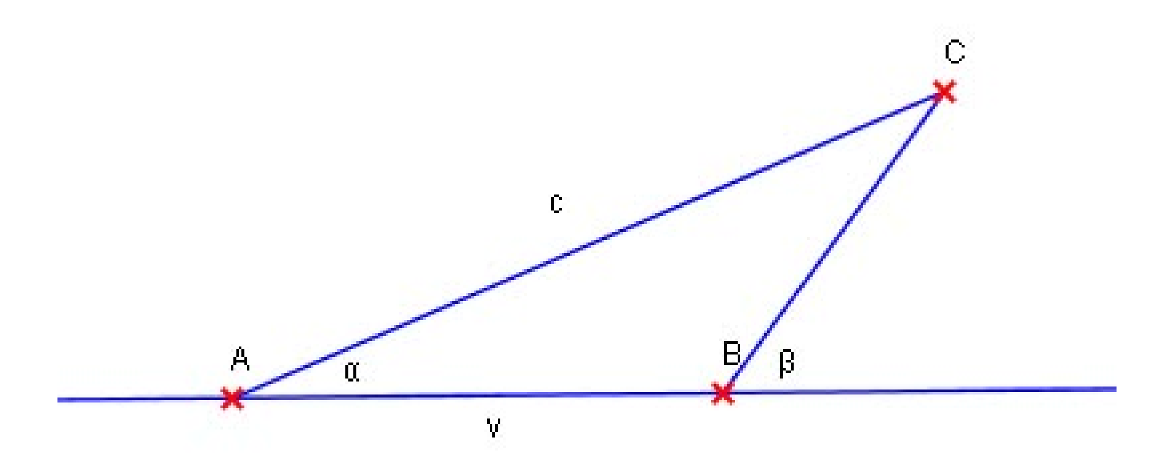
# 10 Aberration de la lumière

Le phénomène de l'aberration de la lumière est observé depuis longtemps par les astronomes : il est connu que la direction apparente d'une étoile, par exemple, dépend de la vitesse de l'observateur. Nos observatoires astronomiques étant situés sur la Terre, il est nécessaire de tenir compte du mouvement de celle-ci autour du Soleil pour établir des cartes du ciel aussi précises que possible. D'autres perturbations, dues par exemple au déplacement du Soleil dans la Galaxie, sont jusqu'à présent négligées.

Classiquement, l'aberration était calculée en combinant la vitesse de la lumière dans le vide avec la vitesse de l'observateur, selon le principe de l'addition vectorielle. En relativité restreinte, le calcul se fait différemment.

Imaginons deux observateurs A et B ; supposons que B s'éloigne de A à la vitesse $\vec{v}$. Dans le repère lié à A, un photon C s'éloigne à la vitesse $\vec{c}$, formant avec $\vec{v}$ un angle $\alpha$. Si on effectue un changement de repère pour étudier le déplacement du photon observé par B, on va constater que son vecteur vitesse fait avec $\vec{v}$ un angle $\beta$ différent de $\alpha$.
Attention : notre figure ne représente pas les mobiles A, B et C dans l'espace, mais seulement leurs vitesses relatives dans l'"espace des vitesses" ; ce n'est pas une représentation spatiale, mais un diagramme des vitesses. On est libre supposer que les observateurs $A$ et $B$ sont situés au même endroit dans l'espace, et voient le photon partir au même instant : $t = 0$ ; ce sont leurs vitesses qui diffèrent.
Notons aussi que, pour la clarté de l'exposé, nous raisonnons pour le moment

comme si les vitesses $\vec{v}$ et $\vec{c}$ étaient récessives : le photon s'éloigne de A ; nous inverserons le sens de parcours par la suite.
Nous allons faire les calculs, pour commencer, avec les vitesses, puis nous les reprendrons avec les rapidités.




Nous allons utiliser la transformation de Lorentz en nous limitant à deux dimension spatiales :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

où $ch\ \frac{w}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et $sh\ \frac{w}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.
Nous supposerons que la vitesse $\vec{v}$ est dirigée selon l'axe des $x$.
Les coordonnées de B, vu par A, sont :

$$\begin{cases} x_B = v\ t \\ y_B = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées de C, vu par A, sont :

$$\begin{cases} x_C &= c\ t\ cos\ \alpha \\ y_C &= c\ t\ sin\ \alpha \end{cases}$$

Les coordonnées de C, vu par B, sont :

$$\begin{cases} x'_C &= -c\ t\ sh\frac{w}{c}\ +\ x_C\ ch\frac{w}{c} = -c\ t\ sh\frac{w}{c}\ +\ c\ t\ cos\ \alpha\ ch\frac{w}{c}\ =\ c\ t\ \frac{cos\ \alpha\ -\ \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y'_C &= y_C\ =\ c\ t\ sin\ \alpha \end{cases}$$

On a donc :

$$tan\ \beta\ =\ \frac{y'_C}{x'_C}\ =\ \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ sin\ \alpha}{cos\ \alpha\ -\ \frac{v}{c}}.$$

Supposons maintenant que le photon C se dirige vers A au lieu de s'en éloigner ; il faut alors remplacer $c$ par $-c$ dans la formule ci-dessus, ce qui donne :

$$tan\ \beta\ =\ \frac{y'_C}{x'_C}\ =\ \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ sin\ \alpha}{cos\ \alpha\ +\ \frac{v}{c}}.$$

C'est sous cette forme que la formule de l'aberration peut être utilisée en astronomie. Mais on peut aussi l'exprimer avec des cosinus :

$$cos^2\ \beta\ =\ \frac{1}{1+tan^2\ \beta}\ =\ \frac{1}{1+\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ sin^2\ \alpha}{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2}}\ =\ \frac{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2}{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ sin^2\ \alpha}$$

$$cos^2\ \beta\ =\ \frac{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2}{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ (1-cos^2\ \alpha)}$$

$$cos^2\ \beta\ =\ \frac{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2}{cos^2\ \alpha+2\frac{v}{c}cos\ \alpha+\frac{v^2}{c^2}+1-\frac{v^2}{c^2}-cos^2\ \alpha+\frac{v^2}{c^2}cos^2\ \alpha}$$

$$cos^2\ \beta\ =\ \frac{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2}{1+2\frac{v}{c}cos\ \alpha+\frac{v^2}{c^2}cos^2\ \alpha}\ =\ \frac{\left(cos\ \alpha+\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1+\frac{v}{c}\ cos\ \alpha\right)^2}$$

d'où on tire (en remarquant que, pour $v = 0$, on doit avoir $cos\ \beta = +cos\ \alpha$, et non $-cos\ \alpha$) :

$$cos\ \beta\ =\ \frac{cos\ \alpha+\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}\ cos\ \alpha}\ =\ \frac{c\ cos\ \alpha+v}{c+v\ cos\ \alpha}.$$

On peut remarquer que :

$$cos\ \beta - cos\ \alpha\ =\ \frac{c\ cos\ \alpha + v}{c + v\ cos\ \alpha} - \frac{c\ cos\ \alpha + v\ cos^2\ \alpha}{c + v\ cos\ \alpha}\ =\ \frac{v\ (1 - cos^2\ \alpha)}{c + v\ cos\ \alpha}$$

$$cos\ \beta - cos\ \alpha\ =\ \frac{v\ sin^2\ \alpha}{c + v\ cos\ \alpha}.$$

Cette quantité étant positive (pour $0 < v < c$), on aura : $cos\ \beta\ >\ cos\ \alpha$, donc $\beta\ <\ \alpha$ ; ce qui signifie que, par rapport à A, l'observateur B aura l'impression que les étoiles sont un peu plus proches du point de la sphère céleste vers lequel il se dirige.

On pourrait se demander si l'aberration ne fournit pas un moyen de définir la vitesse absolue du mobile B ; ce n'est pas le cas, car la formule de l'aberration est réversible : on peut tirer $cos\ \alpha$ en fonction de $cos\ \beta$ ; on obtient alors :

$$cos\ \alpha\ =\ \frac{c\ cos\ \beta - v}{c - v\ cos\ \beta}.$$

C'était prévisible, puisque la vitesse de A (observée par B) est $-v$.

Nous pouvons aussi composer les aberrations.
Imaginons trois observateurs sur la même droite (l'axe des x) : le premier (A) supposé "immobile", le second (B) se déplaçant à la vitesse $v_1$ par rapport à A, le troisième se déplaçant à la vitesse $v_2$ par rapport à B ; les vitesses sont supposées colinéaires. Une même étoile est observée dans la direction $\alpha$ par le premier observateur, $\beta$ par le second, $\gamma$ par le troisième (les angles étant mesurés par rapport à la direction commune des vecteurs vitesse). On a alors :
$cos\ \beta\ =\ \frac{c\ cos\ \alpha + v_1}{c + v_1\ cos\ \alpha}$ et $cos\ \gamma\ =\ \frac{c\ cos\ \beta + v_2}{c + v_2\ cos\ \beta}$, donc :

$$cos\ \gamma\ =\ \frac{c\ \frac{c\ cos\ \alpha + v_1}{c + v_1\ cos\ \alpha} + v_2}{c + v_2\ \frac{c\ cos\ \alpha + v_1}{c + v_1\ cos\ \alpha}}\ =\ \frac{c\ (c\ cos\ \alpha + v_1) + v_2\ (c + v_1\ cos\ \alpha)}{c\ (c + v_1\ cos\ \alpha) + v_2\ (c\ cos\ \alpha + v_1)}$$

$$cos\ \gamma\ =\ \frac{(c^2 + v_1 v_2) cos\ \alpha + (v_1 + v_2)\ c}{(c^2 + v_1 v_2) + (v_1 + v_2)\ c\ cos\ \alpha}\ =\ \frac{c\ \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) cos\ \alpha + (v_1 + v_2)}{c\ \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) + (v_1 + v_2) cos\ \alpha}$$

Nous venons de diviser le numérateur et le dénominateur par c ; divisons-les maintenant par $1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}$ :

$$cos\ \gamma\ =\ \frac{c\ cos\ \alpha + \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}{c + \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}\ cos\ \alpha}$$

Posons : $v = v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$ : c'est la vitesse du troisième mobile par rapport au premier, obtenue par la formule relativiste de composition des vitesses ; on a alors :

$$cos\ \gamma \ = \ \frac{c\ cos\ \alpha + v}{c + v\ cos\ \alpha}.$$

La composée des aberrations s'obtient tout simplement en composant les vitesses.
Ceci marche bien lorsque les deux vitesses sont colinéaires ; si ce n'est pas le cas, une autre approche, basée sur les rapidités, est plus efficace, mais impose de raisonner dans l'espace hyperbolique des rapidités ; c'est ce que nous allons faire maintenant.

Le point $A$ représente la rapidité du premier observateur, $B$ celle du second, $C$ celle du rayon lumineux (vitesse de fuite). Mais la rapidité de la lumière est infinie, donc le point $C$ est à l'infini. Reportons-nous à la figure du triangle avec un sommet à l'infini, dans la section précédente ; rempaçons $A_2$ par $A$, $A_3$ par $B$, $A_1$ par $C$, $a_1$ par $\frac{w}{c}$ (où $w$ est la rapidité relative des deux observateurs), $\alpha_2$ par $\alpha$, $\alpha_3$ par $\pi-\beta$. Remarquons que $th\ a_1 = th\ \frac{w}{c} = \frac{v}{c}$.

La formule : $cos\ \alpha_3 = \frac{th\ a_1 - cos\ \alpha_2}{1 - th\ a_1 . cos\ \alpha_2}$ devient :

$-cos\ \beta = \frac{\frac{v}{c} - cos\ \alpha}{1 - \frac{v}{c}.cos\ \alpha}$ ;

$cos\ \beta = \frac{cos\ \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}.cos\ \alpha} = \frac{c\ cos\ \alpha - v}{c - v\ cos\ \alpha}$.

C'est la formule de l'aberration pour un rayon lumineux fuyant.

Si on raisonne sur un rayon lumineux incident et non fuyant, on doit remplacer $\alpha$ par $\pi - \alpha$ et $\beta$ par $\pi - \beta$ (ou, ce qui revient au même, $c$ par $-c$), et notre formule devient :

$$cos\ \beta = \frac{c\ cos\ \alpha + v}{c + v\ cos\ \alpha}$$

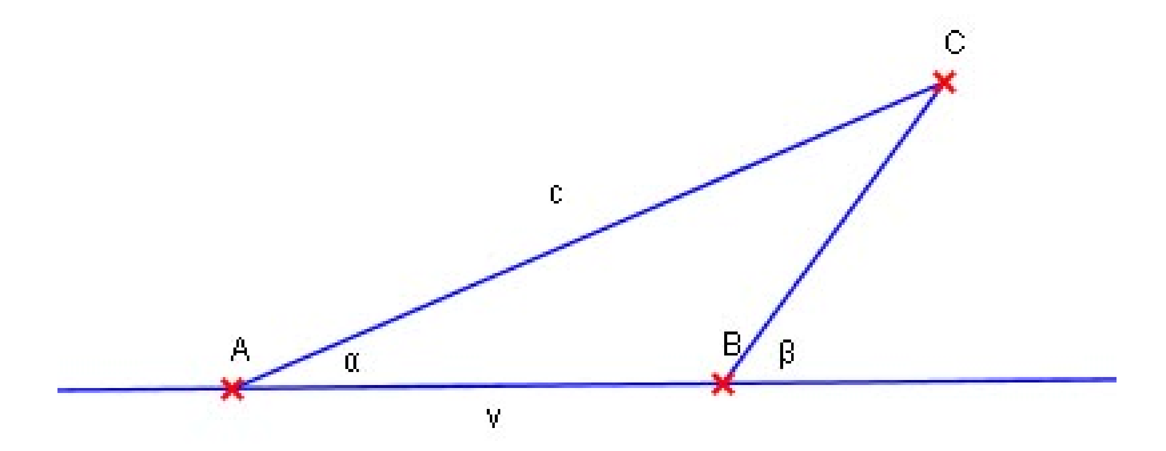
C'est la formule de l'aberration pour un rayon lumineux incident. (C'est en réalité la même formule ; que le rayon lumineux soit considéré comme fuyant ou incident n'est pas pris en compte dans le diagramme des rapi-

dités : il est représenté par un seul point à l'infini. C'est l'observateur qui choisit : il ne mesure pas le même angle, selon qu'il raisonne en termes de fuite ou d'incidence.)

Comme on a pu s'en rendre compte, l'utilisation des rapidités nous a beaucoup simplifié le travail. Mais elle permet aussi de comprendre très clairement comment les aberrations se composent dans l'espace : un même rayon lumineux est représenté par un seul et même point à l'infini dans le diagramme des rapidités ; la direction qui lui est attribuée par un observateur (galiléen) quelconque dépend uniquement de la position de cet observateur dans le diagramme (donc de sa vitesse). Si l'espace des rapidités était euclidien, l'aberration de la lumière n'existerait pas.

# 11 Effet Doppler relativiste

Reprenons la figure de l'aberration de la lumière.



Le point $C$ représente un rayon lumineux parti de $A$ à l'instant $t = 0$, s'éloignant à la vitesse $c$ ; sa direction fait un angle $\alpha$ avec l'axe des abscisses. Pour l'observateur $A$, ce rayonnement a une période $T$, une fréquence $\nu$ et une longueur d'onde $\lambda$. Pour l'observateur $B$ (confondu avec $A$ à l'instant $t = 0$, et se déplaçant à la vitesse $v$ selon l'axe des abscisses), l'angle du rayonnement par rapport à l'axe des abscisses est $\beta$, sa période est $T'$, sa fréquence $\nu'$, sa longueur d'onde $\lambda'$.

Nous avons déjà vu que $\beta$ n'est pas égal à $\alpha$ : c'est le phénomène de l'aberration. Mais $T'$, $\nu'$ et $\lambda'$ ne sont pas non plus égaux à $T$, $\nu$ et $\lambda$ : c'est l'effet Doppler (ou Doppler-Fizeau).

Les coordonnées de C, vu par A, sont :

$$\begin{cases} x_C = c\,t\,cos\,\alpha \\ y_C = c\,t\,sin\,\alpha \end{cases}$$

Les coordonnées de C, vu par B, sont :

$$\begin{cases} x'_C = c\,t\,\frac{cos\,\alpha\,-\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y'_C = y_C = c\,t\,sin\,\alpha \end{cases}$$

Remplaçons $t$ par $T$ (nous allons raisonner sur une période du rayonnement) ; on a, bien sûr : $cT = \lambda$.

$$\begin{cases} x_C = c\,T\,cos\,\alpha = \lambda\,cos\,\alpha \\ y_C = c\,T\,sin\,\alpha = \lambda\,sin\,\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_C = c\,T\,\frac{cos\,\alpha\,-\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lambda\,\frac{cos\,\alpha\,-\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y'_C = y_C = \lambda\,sin\,\alpha \end{cases}$$

D'où on tire $\lambda'$ :

$$\lambda' = \sqrt{{x'_C}^2 + {y'_C}^2} = \lambda\sqrt{\left(\frac{cos\alpha-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + sin^2\alpha}$$

$\lambda' = \lambda \ \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)sin^2\alpha+\left(cos\alpha-\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lambda \ \frac{\sqrt{sin^2\alpha-\frac{v^2}{c^2}sin^2\alpha+cos^2\alpha-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\lambda' = \lambda \ \frac{\sqrt{1-2\frac{v}{c}cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lambda \ \frac{1-\frac{v}{c}cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$

On aurait pu démontrer cette formule d'une autre façon : en effet, on doit avoir $x'_C = cT' \ cos\beta = \lambda' \ cos\beta$, donc :

$x'_C = \ \lambda \ \frac{cos\alpha \ - \ \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lambda' \ cos\beta = \lambda' \ \frac{cos\alpha-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c} \ cos\alpha}$, ce qui conduit bien à :

$$\lambda' = \lambda \ \frac{1-\frac{v}{c}cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dans le cas particulier où la vitesse relative $\vec{v}$ des deux mobiles et la vitesse $\vec{c}$ du photon sont colinéaires, on a $cos\alpha = 1$, et la formule devient donc :

$$\lambda' = \lambda \ \frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lambda \ \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

C'est généralement cette formule qui est utilisée dans les calculs.

Remarquons encore que $\frac{v}{c} = th\frac{w}{c}$ (ou $w$ est la rapidité relative des deux observateurs).

$\frac{c-v}{c+v} = \frac{1-th\frac{w}{c}}{1+th\frac{w}{c}} = \frac{ch\frac{w}{c}-sh\frac{w}{c}}{ch\frac{w}{c}+sh\frac{w}{c}}$

Comme $ch\frac{w}{c} = \frac{e^{\frac{w}{c}}+e^{-\frac{w}{c}}}{2}$ et $sh\frac{w}{c} = \frac{e^{\frac{w}{c}}-e^{-\frac{w}{c}}}{2}$, on voit que :

$ch\frac{w}{c} - sh\frac{w}{c} = e^{-\frac{w}{c}}$ et $ch\frac{w}{c} + sh\frac{w}{c} = e^{\frac{w}{c}}$, donc :

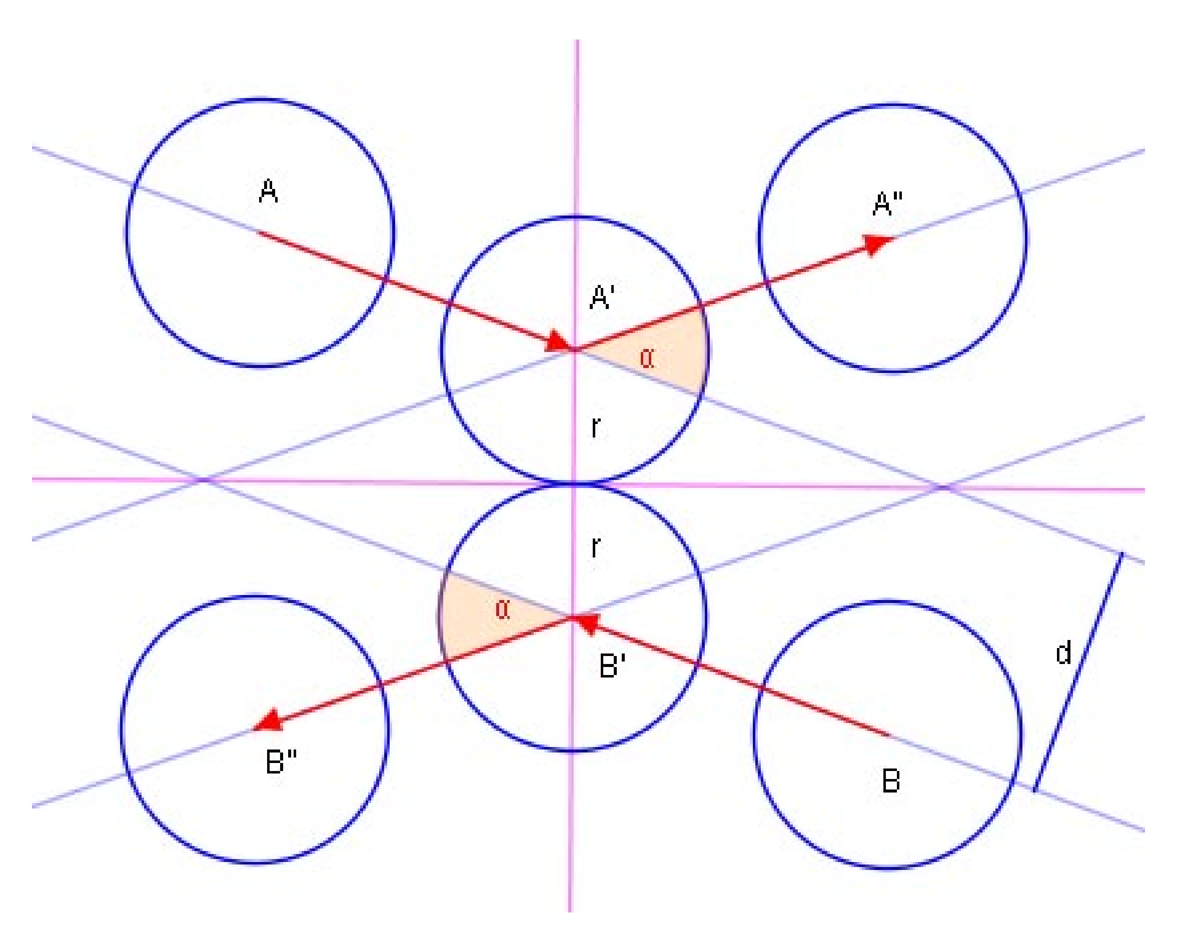
$\frac{c-v}{c+v} = \frac{e^{-\frac{w}{c}}}{e^{\frac{w}{c}}} = e^{-2\frac{w}{c}}$

$\lambda' = \lambda \ \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \lambda \ \sqrt{e^{-2\frac{w}{c}}} = \lambda \ e^{-\frac{w}{c}}.$

L'effet Doppler relativiste se résume donc (dans le cas des vitesses colinéaires) par les trois formules suivantes :

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \ e^{-\frac{w}{c}} \\ T' = T \ e^{-\frac{w}{c}} \\ \nu' = \nu \ e^{\frac{w}{c}} \end{cases}$$

# 12 Cinématique du choc élastique

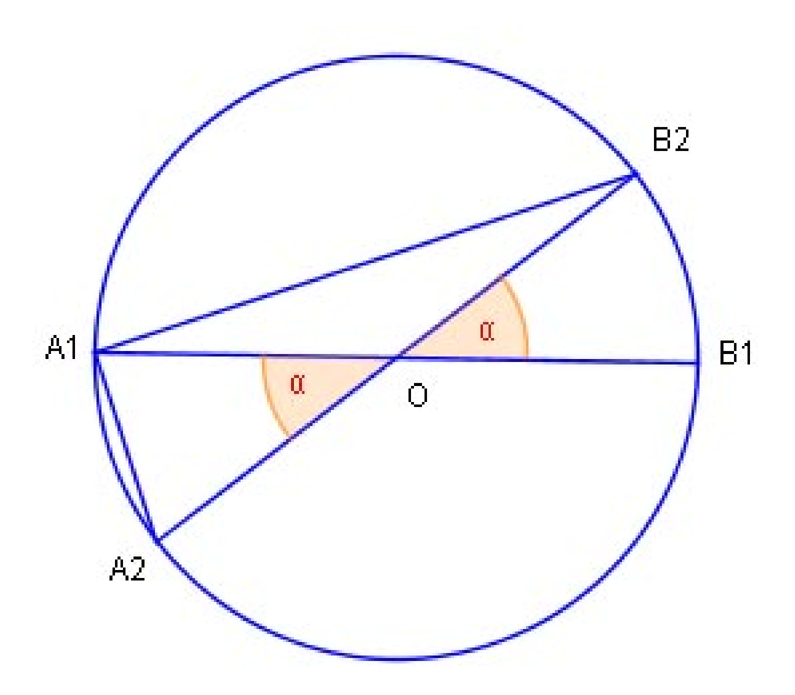



Imaginons un électron immobile, percuté par un électron rapide. D'après la mécanique newtonienne, après le choc, les vitesses des électrons diffusés seront perpendiculaires. D'après la relativité restreinte, ces vitesses formeront

un angle aigu. On sait que l'expérience a donné raison à la relativité. Le but que nous nous proposons ici est d'expliquer, à l'aide des rapidités, pourquoi les deux théories font des prédictions différentes.

Nous allons d'abord raisonner comme si les mobiles étaient deux boules de billard identiques, de rayon $r$, et de même masse ; nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique classique. Nous choisissons un repère galiléen lié au centre de gravité du système : les vitesses des deux boules sont alors des vecteurs opposés, et leurs trajectoires sont parallèles ; on note $d$ la distance de ces deux parallèles. Nous avons représenté trois positions successives de la première boule : $A$ (avant le choc), $A'$ (au moment du choc), et $A''$ (après le choc). Le vecteur vitesse a tourné d'un angle $\alpha$. Pour la seconde boule, nous avons représenté les positions $B$, $B'$, $B''$, symétriques de $A$, $A'$ et $A''$.

On peut montrer que $d = 2r \; cos \; \frac{\alpha}{2}$ ; donc $\alpha = 2 \; arccos \; \frac{d}{2r}$. Pour $d = 2r$, on a : $\alpha = 0$ (trajectoires rasantes, pas de choc) ; pour $d = 0$, on obtient : $\alpha = \pi$ (choc frontal). Mais ceci n'a pas d'importance pour la suite : nous retiendrons seulement que les vecteurs vitesse, qui étaient opposés , le sont toujours ; ils ont simplement tourné d'un même angle $\alpha$. Attention : ceci n'est vrai que dans un repère particulier, attaché au centre de gravité. Il va falloir changer de repère, pour se placer dans celui de l'observateur.



Représentons les vecteurs vitesse par un diagramme : $O$ représente la vitesse du centre de gravité (on peut considérer que c'est l'origine du repère), $A1$ et $B1$ représentent les vitesses des boules $A$ et $B$ avant le choc, $A2$ et $B2$ leurs vitesses après le choc.

Nous avons dit que, dans l'expérience sur les chocs d'électrons, l'un des électrons devait être immobile. Ici, c'est la première boule ($A$) qui sera immobile ; sous-entendu : immobile par rapport à l'observateur (ou au laboratoire où se déroule l'expérience). Ceci veut dire que, sur le diagramme des vitesses, l'observateur se situe en $A1$.

D'après la règle de composition des vitesses (en mécanique classique), la vitesse de la première boule par rapport à l'observateur, après le choc, est $A1\vec{A}2$, et celle de la seconde est $A1\vec{B}2$ ; puisque le triangle $(A1A2B2)$ est rectangle en $A1$ (théorème du cercle circonscrit au triangle rectangle), on conclut que les vitesses des deux boules, après le choc, sont perpendiculaires.

Etudions maintenant le problème d'un point de vue relativiste. Tout le début du raisonnement reste vrai ; c'est au moment où intervient la composition des vitesses que les difficultés apparaissent : la composition des vitesses ne peut pas se faire par addition vectorielle. Une solution simple consiste à remplacer les vitesses par les rapidités : elles ne se combinent pas non plus vectoriellement, mais au moins elles permettent de définir un espace métrique utilisable.

Rappelons-nous la formule que nous avions trouvée au paragraphe sur le cercle circonscrit : $tan\ \widehat{AMB} = \frac{2\ ch\ r}{sh^2\ r.sin\ \phi}$ ; nous devons remplacer $\widehat{AMB}$ par $A2\widehat{A1}B2$ et $\phi$ par $\alpha$ ; quant au rayon du cercle, c'est $\frac{w}{2c}$, où $w$ désigne la rapidité relative des deux boules. Il vient :

$$tan\ A2\widehat{A1}B2 = \frac{2\ ch\ \frac{w}{2c}}{sh^2\ \frac{w}{2c}.sin\ \alpha}.$$

Cette expression représente l'angle formé par les vecteurs vitesses des deux boules de billard après le choc, du point de vue de l'observateur.

Si $\frac{w}{2c}$ est petit, l'angle est proche de $90^\circ$ ; mais si on fait tendre $\frac{w}{2c}$ vers l'infini, il tend vers $0^\circ$. Ceci explique pourquoi l'angle de diffusion des deux électrons peut être aigu : pour cela, il faut que la vitesse de l'électron utilisé comme projectile soit proche de celle de la lumière.

On voit que ce phénomène s'explique de manière très simple, et purement géométrique. Si l'espace des rapidités était euclidien, l'angle de diffusion serait toujours droit !

# 13 Quelques mots sur la mécanique relativiste

Notre travail porte sur les vitesses en relativité restreinte, et non sur la mécanique relativiste ; ce dernier sujet est très vaste, et nous ne l'aborderons que de manière superficielle. Pour plus d'informations, on pourra se reporter à des cours en ligne.

Considérons un mobile se déplaçant sur une droite ; son abscisse est $x$ et sa vitesse est $v$ ; il est soumis à une force F. Appelons $m$ sa masse, $p$ son impulsion (quantité de mouvement), $E$ son énergie (et $E_c$ son énergie cinétique). On a alors, selon la mécanique classique, quelques formules fondamentales :

$$\begin{cases} p = m\ v \\ E_c = \frac{1}{2} m\ v^2 \\ F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} \\ F = \frac{dE}{dx} \end{cases}$$

Les égalités : $F = \frac{dp}{dt}$ et $F = \frac{dE}{dx}$ se ressemblent ; $dt$ et $dx$ sont les deux composantes (temporelle et spatiale) de l'invariant de Minkowski élémentaire : $(ds)^2 = (dx)^2 - (c\ dt)^2$ ; ceci traduit une parenté entre $dp$ et $dE$, qui peut s'écrire ainsi :

$$(dE)^2 - (c\ dp)^2 = F^2\ (dx)^2 - F^2\ c^2\ (dt)^2 = F^2\ ((dx)^2 - (c\ dt)^2) = F^2\ (ds)^2.$$

Puisque $ds$ est invariant par la transformation de Lorentz, on en déduit que la quantité $(dE)^2 - (c\ dp)^2$ est également invariante ; sachant que $(dx)^2 - (c\ dt)^2$ est la forme infinitésimale de l'invariant plus général $x^2 - (c\ t)^2$, on peut être tenté de penser que $(dE)^2 - (c\ dp)^2$ est la forme infinitésimale d'un autre invariant plus général (invariant d'impulsion-énergie) : $E^2 - (c\ p)^2$ ; mais en mécanique classique, cette quantité n'est pas invariante. Quels seraient les

changements à apporter à la mécanique classique pour que cette invariance soit assurée ?

Nous souhaitons avoir : $\frac{d(E^2 - c^2\ p^2)}{dt} = 0$, ce qui se traduit par :

$2\ E\ \frac{dE}{dt} - 2\ c^2\ p\ \frac{dp}{dt} = 0$, ou : $E\ \frac{dE}{dx}\ \frac{dx}{dt} - c^2\ p\ \frac{dp}{dt} = 0$.

Remplaçons $\frac{dx}{dt}$ par $v$, $p$ par $m\ v$, $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dE}{dx}$ par $F$ ; il vient :

$E\ F\ v - c^2\ m\ v\ F = 0$, soit : $E = m\ c^2$.

Sachant que $E$ varie selon la vitesse, on en déduit que la masse $m$ doit varier aussi ; notons $m_0$ la masse au repos (que nous supposerons invariante) , et reprenons l'invariant d'impulsion-énergie :

$E^2 - c^2\ p^2 = (m\ c^2)^2 - c^2\ (m\ v)^2 = m^2\ c^4\ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, soit $m_0^2\ c^4$ (pour $v = 0$) ;

on en déduit que :

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $p = m\ v = \frac{m_0\ v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $E = m\ c^2 = \frac{m_0\ c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Voici donc les trois égalités essentielles, grâce auxquelles les lois fondamentales de la mécanique deviennent invariantes par la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} m = m_0 \ ch\frac{w}{c} \\ p = m_0 \ c \ sh\frac{w}{c} \\ E = m_0 \ c^2 \ ch\frac{w}{c} \end{cases}$$

Nous voyons que nous venons de modifier la définition de l'énergie, dans le but d'assurer l'invariance de la quantité $E^2 - (cp)^2$ (qui était déjà Lorentz-invariante au niveau différentiel : $dE^2 - (cdp)^2$). On peut se demander dans quelle mesure cette modification est légitime. On doit bien comprendre que cette modification n'est pas arbitraire, mais nécessaire, car une quantité qui n'est pas Lorentz-invariante est inutilisable en relativité restreinte : elle ne peut pas avoir de réalité physique. C'est la nouvelle définition de l'énergie qui est légitime, et non l'ancienne.

L'égalité $ch^2\frac{w}{c} - sh^2\frac{w}{c} = 1$ se traduit par :

$\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 - \left(\frac{cp}{m_0c^2}\right)^2 = \frac{E^2-c^2p^2}{m_0^2c^4} = 1$, donc :

$\sqrt{E^2 - c^2p^2} = m_0c^2$.

Un changement de point de vue (modification de $w$) modifie $m$, $p$ et $E$, mais ne modifie ni $m_0$, ni $\sqrt{E^2 - c^2p^2}$ : c'est l'invariant d'impulsion-énergie. Celui-ci ne peut être modifié que par un phénomène physique accompagné d'un échange d'énergie, avec modification de $m_0$ .

Dans un phénomène purement géométrique, sans échange d'énergie avec l'extérieur, $m_0$ est constant ; on a alors :

$dp = m_0 \ c \ d(sh\frac{w}{c}) = m_0 \ ch\frac{w}{c}dw = \frac{E}{c^2}dw = m \ dw$, donc $\frac{dp}{dt} = m \ \frac{dw}{dt}$, ou encore : $F = m\Gamma$.

On reconnaît la formule fondamentale de la mécanique Newtonienne : $F$ est la force (définie par : $F = \frac{dp}{dt}$) et $\Gamma$ est l'accélération ; mais ici $\Gamma$ est égal à $\frac{dw}{dt}$ et non à $\frac{dv}{dt}$. (La différence n'est sensible que pour $v$ proche de $c$.) Ceci montre bien le rôle central de la rapidité en mécanique relativiste.

On a aussi :

$dE = m_0\ c^2\ d(ch\frac{w}{c}) = m_0\ c\ sh\frac{w}{c}dw = p\ dw = m\ v\ dw.$

$\frac{dE}{dx} = m\ v\ \frac{dw}{dx} = m\ \frac{dx}{dt}\ \frac{dw}{dx} = m\ \frac{dw}{dt} = m\Gamma = F$, donc on a bien, comme on pouvait s'y attendre :

$F = m\Gamma = \frac{dp}{dt} = \frac{dE}{dx}$, avec $\Gamma = \frac{dw}{dt}$.

La mécanique relativiste diffère également de la mécanique classique par l'expression de l'énergie cinétique :

Si $E_0$ est l'énergie au repos : $E_c = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\ c^2 = m_0\ c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$.

Quand $v$ est très petit par rapport à $c$, $E_c$ est proche de $\frac{1}{2}m_0\ v^2$, ce qui est cohérent avec la mécanique classique.

Nous avons raisonné ici dans un espace de dimension un (une droite) mais tout ce qui a été dit se transpose facilement à la dimension trois ; la force $\vec{F}$, l'accélération $\vec{\Gamma}$, la vitesse usuelle $\vec{v}$, la rapidité $\vec{w}$, l'impulsion $\vec{p}$ deviennent des vecteurs, tandis que $E$ reste un scalaire. On a alors :

$\vec{F} = m\ \vec{\Gamma} = m\ \dfrac{d\vec{w}}{dt}$, $dE = \vec{p}\ .\ d\vec{w}$ (produit scalaire), et $d\vec{p} = \dfrac{E}{c^2}\ d\vec{w}$.

En plus de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, on pourra utiliser dans les calculs la conservation du moment cinétique.

Le moment cinétique d'un mobile par rapport à un point O est : $\vec{\mu} = \vec{p} \wedge \vec{r}$ (produit vectoriel de l'impulsion par le rayon vecteur joignant O au mobile). Pour qu'il se conserve, il faut que le mobile se déplace librement, ou soit soumis à une force parallèle à $\vec{r}$. Démontrons-le :

$\dfrac{d\vec{\mu}}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{r}\ +\ \vec{p} \wedge \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ;

remplaçons $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ par $\vec{F}$, $\vec{p}$ par $m\vec{v}$ et $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ par $\vec{v}$ ; l'égalité devient :

$\dfrac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{F} \wedge \vec{r}\ +\ m\vec{v} \wedge \vec{v}.$

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul, donc $\vec{F} \wedge \vec{r} = \vec{0}$ et $m\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, ce qui entraîne : $\dfrac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{0}$.

# 14 Quadrivecteur vitesse et quadrivecteur impulsion-énergie

Deux observateurs O et O' se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante $V$ (vitesse dirigée selon l'axe des x), soit avec la rapidité $w$ ; ils observent un mobile M à deux instants très rapprochés, et notent l'écart spatio-temporel des deux événements. O a noté : $(cdt, idx, idy, idz)$, qu'on peut écrire aussi $c\ dt(1, i\frac{v_x}{c}, i\frac{v_y}{c}, i\frac{v_z}{c})$ ; O' a noté : $(cdt', idx', idy', idz')$, qu'on peut écrire aussi $c\ dt'(1, i\frac{v'_x}{c}, i\frac{v'_y}{c}, i\frac{v'_z}{c})$. Pour O, la vitesse du mobile M est $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ; pour O', c'est $v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}$. Notons $\tau$ le temps propre du mobile M (indiqué par ses horloges) ; on a : $dt = \dfrac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ et $dt' = \dfrac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$, donc $cd\tau = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt = c\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}dt'$.

Sachant que $\begin{pmatrix} c\ dt' \\ i\ dx' \\ i\ dy' \\ i\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{iw}{c} & sin\frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ -sin\frac{iw}{c} & cos\frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\ dt \\ i\ dx \\ i\ dy \\ i\ dz \end{pmatrix}$
(avec, rappelons-le : $cos\ i\phi = ch\ \phi$ et $sin\ i\phi = i\ sh\ \phi$.), on déduit (en divisant le membre de gauche par $c\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}dt'$, et le membre de droite par $c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$) :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\ \frac{v'_x}{c} \\ i\ \frac{v'_y}{c} \\ i\ \frac{v'_z}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{iw}{c} & sin\frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ -sin\frac{iw}{c} & cos\frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\ \frac{v_x}{c} \\ i\ \frac{v_y}{c} \\ i\ \frac{v_z}{c} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $V = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(1, i\ \dfrac{v_x}{c}, i\ \dfrac{v_y}{c}, i\ \dfrac{v_z}{c})$, à 4 dimensions, est appelé qua-

drivecteur vitesse ; il se transforme par la transformation de Lorentz.

Notre égalité peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{v'_x}{c}\\ \frac{v'_y}{c}\\ \frac{v'_z}{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0\\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{v_x}{c}\\ \frac{v_y}{c}\\ \frac{v_z}{c}\end{pmatrix}.$$

En multipliant les deux membres par $m_0c^2$, on obtient :

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{v'_x}{c}\\ \frac{v'_y}{c}\\ \frac{v'_z}{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0\\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{v_x}{c}\\ \frac{v_y}{c}\\ \frac{v_z}{c}\end{pmatrix}, \text{ soit :}$$

$$\begin{pmatrix}E'\\ cp'_x\\ cp'_y\\ cp'_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0\\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ cp_x\\ cp_y\\ cp_z\end{pmatrix}, \text{ ou encore :}$$

$$\begin{pmatrix}E'\\ icp'_x\\ icp'_y\\ icp'_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\frac{iw}{c} & sin\frac{iw}{c} & 0 & 0\\ -sin\frac{iw}{c} & cos\frac{iw}{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ icp_x\\ icp_y\\ icp_z\end{pmatrix}.$$

Le vecteur $I=\begin{pmatrix}E\\ icp_x\\ icp_y\\ icp_z\end{pmatrix}$ est appelé : quadrivecteur impulsion-énergie.

Il est, évidemment, Lorentz-invariant.

On peut définir un produit scalaire des quadrivecteurs vitesse :

$$V_1.V_2=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}(1,i\ \frac{v_{1x}}{c},i\ \frac{v_{1y}}{c},i\ \frac{v_{1z}}{c}).\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}(1,i\ \frac{v_{2x}}{c},i\ \frac{v_{2y}}{c},i\ \frac{v_{2z}}{c});$$

$$V_1.V_2=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\ \sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\left(1-\frac{v_{1x}v_{2x}+v_{1y}v_{2y}+v_{1z}v_{2z}}{c^2}\right);$$

la norme associée est : $||v|| = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{(1, i\ \frac{v_x}{c}, i\ \frac{v_y}{c}, i\ \frac{v_z}{c}).(1, i\ \frac{v_x}{c}, i\ \frac{v_y}{c}, i\ \frac{v_z}{c})} =$
$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{1-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}} = 1.$

On peut définir aussi un produit scalaire des quadrivecteurs impulsion-énergie :

$I_1.I_2 = (E_1, i\ cp_{1x}, i\ cp_{1y}, i\ cp_{1z}).(E_2, i\ cp_{2x}, i\ cp_{2y}, i\ cp_{2z}) = E_1E_2 - (c^2p_{1x}p_{2x} + c^2p_{1y}p_{2y} + c^2p_{1z}p_{2z}) = E_1E_2 - c^2\vec{p}_1\vec{p}_2$ ;

la norme associée est :
$||I|| = \sqrt{(E, icp_x, icp_y, icp_z).(E, icp_x, icp_y, icp_z)} = \sqrt{E^2 - c^2p^2} = m_0c^2.$

# 15 Forces

Reprenons la formule : $\begin{pmatrix} E' \\ cp'_x \\ cp'_y \\ cp'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ cp_x \\ cp_y \\ cp_z \end{pmatrix}.$

Il s'agit ici du quadrivecteur impulsion-énergie d'un mobile accéléré, observé par deux observateurs galiléens (non accélérés), O et O' ; de plus, nous supposerons que l'observateur O accompagne le mobile (la vitesse relative du mobile par rapport à O est nulle) à l'instant $t = 0$ ; bien entendu, comme le mobile est accéléré, tandis que O ne l'est pas, leurs vitesses ne coïncident que pendant une durée infinitésimale.
On peut considérer que $w$ est constant (c'est la vitesse relative des deux observateurs), mais le quadrivecteur impulsion-énergie varie (puisque le mobile est accéléré).
Sous forme différentielle, l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{pmatrix} dE' \\ cdp'_x \\ cdp'_y \\ cdp'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dE \\ cdp_x \\ cdp_y \\ cdp_z \end{pmatrix}.$$

Nous allons diviser les deux membres de l'égalité par $d\tau$, intervalle infinitésimal de temps propre du mobile. Cet intervalle de temps propre, évalué par les horloges de O et O', donne : $dt = d\tau$ (pour l'observateur O) et $dt' = ch\frac{w}{c}\ d\tau$ (pour O') ; donc $d\tau = dt = \frac{dt'}{ch\frac{w}{c}}$ ; nous pouvons donc diviser le membre de

gauche de notre égalité par $\frac{dt'}{ch\frac{w}{c}}$, et le membre de droite par $dt$ ; nous obtenons :

$$ch\frac{w}{c}\begin{pmatrix}\frac{dE'}{dt'}\\ c\ \frac{dp'_x}{dt'}\\ c\ \frac{dp'_y}{dt'}\\ c\ \frac{dp'_z}{dt'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0\\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dE}{dt}\\ c\ \frac{dp_x}{dt}\\ c\ \frac{dp_y}{dt}\\ c\ \frac{dp_z}{dt}\end{pmatrix}.$$

Du point de vue de nos deux observateurs, les composantes de la force qui agit sur le mobile sont :

- pour O : $\begin{cases}F_x=\frac{dp_x}{dt}\\ F_y=\frac{dp_y}{dt}\\ F_z=\frac{dp_z}{dt}\end{cases}$ ;

- pour O' : $\begin{cases}F'_x=\frac{dp'_x}{dt'}\\ F'_y=\frac{dp'_y}{dt'}\\ F'_z=\frac{dp'_z}{dt'}\end{cases}$ .

Dans l'égalité précédente, explicitons la deuxième, la troisième et la quatrième lignes à l'aide de $F$ et $F'$ :

Deuxième ligne :
$c\ ch\frac{w}{c}\ F'_x=c\ ch\frac{w}{c}\ F_x-\frac{dE}{dt}\ sh\frac{w}{c}=c\ ch\frac{w}{c}\ F_x-\frac{F_x\ dx}{dt}\ sh\frac{w}{c}$ ;
comme $\frac{dx}{dt}=0$ (puisque la vitesse du mobile est nulle dans le repère de O, à l'instant considéré), on voit que :
$c\ ch\frac{w}{c}\ F'_x=c\ ch\frac{w}{c}\ F_x$, donc $F'_x=F_x$.

Troisième ligne :
$c\ ch\frac{w}{c}\ F'_y=c\ F_y$, donc $F'_y=F_y.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Quatrième ligne :
$c\ ch\frac{w}{c}\ F'_z=c\ F_z$, donc $F'_z=F_z.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

$$\begin{cases}F'_x=F_x\\ F'_y=F_y.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\\ F'_z=F_z.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\end{cases}$$

# 16 Masse au repos et masse maupertuisienne

Considérons deux corps galiléens de masses au repos $m_1$ et $m_2$, et de rapidités $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ colinéaires. (On peut toujours se ramener à ce cas particulier par un changement de repère : si les rapidités $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ sont représentées par deux points $A_1$ et $A_2$ dans le diagramme des rapidités, alors il suffit que le repère de référence soit représenté par un point quelconque de la droite $(A_1A_2)$ ; ceci nous autorise à remplacer les vecteurs $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ par les nombres réels $w_1$ et $w_2$).

Les énergies des deux corps sont : $E_1 = m_1\, c^2\, ch\left(\frac{w_1}{c}\right)$ et $E_2 = m_2\, c^2\, ch\left(\frac{w_2}{c}\right)$ ; leurs impulsions sont : $p_1 = m_1\ c\ sh\left(\frac{w_1}{c}\right)$ et $p_2 = m_2\ c\ sh\left(\frac{w_2}{c}\right)$.

Considérons maintenant le système composé des deux éléments précédents. Soit $E$ son énergie et $p$ son impulsion. En relativité restreinte, comme en mécanique classique, les énergies et les impulsions s'additionnent :
$E = E_1 + E_2$, $p = p_1 + p_2$.

Notons $m$ la masse au repos du système, et $w$ sa rapidité. (Attention : dire qu'un corps composé est au repos ne signifie pas que ses parties soient au repos : par exemple, dans un atome au repos, les électrons sont en mouvement.) Nous voulons calculer $m$ (et, accessoiremant, $w$).

$E = m\ c^2\ ch\left(\frac{w}{c}\right) = E_1 + E_2 = m_1\ c^2\ ch\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ c^2\ ch\left(\frac{w_2}{c}\right)$, donc :

$m\ ch\left(\frac{w}{c}\right) = m_1\ ch\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ ch\left(\frac{w_2}{c}\right)$ ;

$p = m\ c\ sh\left(\frac{w}{c}\right) = p_1 + p_2 = m_1\ c\ sh\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ c\ sh\left(\frac{w_2}{c}\right)$, donc :

$m\ sh\left(\frac{w}{c}\right) = m_1\ sh\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ sh\left(\frac{w_2}{c}\right)$.

$$\begin{cases} m\ ch\left(\frac{w}{c}\right) = m_1\ ch\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ ch\left(\frac{w_2}{c}\right) \\ m\ sh\left(\frac{w}{c}\right) = m_1\ sh\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ sh\left(\frac{w_2}{c}\right) \end{cases}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, puis en les retranchant membre à membre (et en utilisant les formules : $ch\ x + sh\ x = e^x$ et $ch\ x - sh\ x = e^{-x}$), nous obtenons :

$$\begin{cases} m\ e^{\frac{w}{c}} = m_1\ e^{\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{\frac{w_2}{c}} \\ \\ m\ e^{-\frac{w}{c}} = m_1\ e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{-\frac{w_2}{c}} \end{cases}$$

Pour calculer $m$, nous allons multiplier ces deux nouvelles égalités membre à membre. Il vient :

$$m^2 = m_1^2 + m_1\ m_2\ e^{\frac{w_1 - w_2}{c}} + m_1\ m_2\ e^{\frac{w_2 - w_1}{c}} + m_2^2 = m_1^2 + 2\ m_1\ m_2\ ch\ \frac{w_1 - w_2}{c} + m_2^2\ ;$$

$$m = \sqrt{m_1^2 + 2\ m_1\ m_2\ ch\ \frac{\Delta w}{c} + m_2^2}.$$

(Remarquons que cette quantité est indépendante de l'observateur.)

Cette formule signifie que la masse au repos $m$ du système n'est égale à la somme des masses au repos de ses deux constituants que dans le cas particulier où la rapidité relative des deux corps ($\Delta w$) est nulle ; dans le cas contraire, la masse du corps composé est supérieure à la somme des masses de ses constituants.

Il est donc impossible de considérer la masse au repos comme une mesure de la "quantité de matière", comme on pourrait être tenté de le faire ; ce n'est pas non plus une propriété intrinsèque des particules, comme la charge électrique : si un système est formé de deux particules de charges $q_1$ et $q_2$, alors la charge du système est $q_1 + q_2$ ; ceci ne marche pas avec les masses au repos !

Poussons le raisonnement à l'extrême : imaginons un système formé de deux photons (ou d'autres particules de masse au repos nulle) tournant autour de leur centre de gravité commun immobile (en supposant que ce soit possible). Ces deux photons ont la même énergie : $E_1 = E_2 = h\ \nu$, et leurs impulsions (de module $p_1 = p_2 = \frac{h\ \nu}{c}$) sont opposées. Il va de soi que chaque photon en mouvement a une masse non nulle (c'est : $\frac{E_1}{c^2} = \frac{h\ \nu}{c^2}$) ; mais leur "masse au repos" est nulle : $m_1\ c^2 = \sqrt{E_1^2 - c^2\ p_1^2} = \sqrt{h^2\ \nu^2 - h^2\ \nu^2} = 0$. Ceci est d'ailleurs purement théorique, puisqu'un photon au repos n'existe pas !

Quant au système formé par les deux photons, il a une masse au repos $m$ non nulle. En effet :

- l'énergie du système est : $E = E_1 + E_2 = 2h\ \nu$ ;
- son impulsion est : $p = 0$ ;

- sa masse au repos est : $m = \frac{E}{c^2} = \frac{2h\ \nu}{c^2}$.

Nous ne chercherons pas à savoir quel type de force peut lier ainsi les deux particules ; retenons seulement qu'un assemblage de particules de masses au repos nulles peut avoir une masse au repos non nulle. On est en droit de se demander si les particules de masse non nulle ne sont pas toutes des assemblages de particules de masse nulle ... mais je n'aurai pas l'imprudence de répondre à cette question : mon but est seulement de montrer qu'en relativité restreinte, la notion de masse au repos n'a rien à voir avec la masse au sens de Newton ...

Dans la réalité, il faut tenir compte des forces de liaison (que nous n'avons pas envisagées ici), et donc de l'énergie potentielle négative qui entre en jeu dans la masse des assemblages de particules ; par exemple, un assemblage de deux protons a une masse au repos inférieure au double de celle du proton. Ceci ne contredit pas les remarques précédentes.

Calculons maintenant $w$ ; on peut écrire :

$$e^{\frac{w}{c}} = \frac{m_1\ e^{\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{\frac{w_2}{c}}}{m} = \frac{m_1\ e^{\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{\frac{w_2}{c}}}{\sqrt{m_1^2 + 2\ m_1\ m_2\ ch\ \frac{\Delta w}{c} + m_2^2}}\ ;$$

$$e^{\frac{w}{c}} = \frac{m}{m_1\ e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{-\frac{w_2}{c}}} = \frac{\sqrt{m_1^2 + 2\ m_1\ m_2\ ch\ \frac{\Delta w}{c} + m_2^2}}{m_1\ e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{-\frac{w_2}{c}}}\ ;$$

$$e^{2\frac{w}{c}} = \frac{m_1\ e^{\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{\frac{w_2}{c}}}{m_1\ e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2\ e^{-\frac{w_2}{c}}}.$$

Calculons encore la vitesse globale $v$ du système :

$\frac{v}{c} = th\left(\frac{w}{c}\right) = \frac{sh\left(\frac{w}{c}\right)}{ch\left(\frac{w}{c}\right)} = \frac{m_1\ sh\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ sh\left(\frac{w_2}{c}\right)}{m_1\ ch\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2\ ch\left(\frac{w_2}{c}\right)}$.

Posons : $M_1 = m_1\ ch\left(\frac{w_1}{c}\right)$ et $M_2 = m_2\ ch\left(\frac{w_2}{c}\right)$ (masses maupertuisiennes) ;

$m_1\ sh\left(\frac{w_1}{c}\right) = \frac{v_1}{c}\ M_1$ ; $m_2\ sh\left(\frac{w_2}{c}\right) = \frac{v_2}{c}\ M_2$ ; par conséquent : $\frac{v}{c} = \frac{\frac{v_1}{c}\ M_1 + \frac{v_2}{c}\ M_2}{M_1 + M_2}$.

$$(M_1 + M_2)\ v = M_1\ v_1 + M_2\ v_2$$

La formule obtenue est analogue à celle de la mécanique classique, mais les masses usuelles ont été remplacées par les masses maupertuisiennes, variables selon la vitesse. C'est cette formule qu'il faudra utiliser pour étudier les chocs élastiques par exemple. Ceci prouve que la masse qui est mise en évidence dans les expériences sur les chocs de mobiles (la masse inerte) est en fait une masse maupertuisienne, et non une masse au repos. Mais est-ce la même masse qui est mise en évidence par la pesée ? Si oui, la masse pesante, comme la masse inerte, correspond, elle aussi, à la masse maupertuisienne. C'est ce que confirment les mesures les plus précises.

De ces quelques remarques, il ressort qu'en relativité restreinte, c'est la masse maupertuisienne $m$ (et non la "masse au repos" $m_0$) qui va remplacer la masse au sens de Newton. La différence essentielle, c'est que la masse au sens de Newton est constante et absolue, tandis que la masse maupertuisienne est relative : elle dépend de l'état de mouvement du mobile par rapport à l'observateur. Elle équivaut à une énergie (au coefficient $c^2$ près), puisque $E = m_0\ c^2\ ch\left(\frac{w}{c}\right) = m\ c^2$.

Dans un choc de particules, comme dans une désintégration, c'est la masse maupertuisienne qui se conserve, et non la masse au repos. Citons un exemple célèbre : quand un photon se désintègre en une paire électron-positron, un excédent de masse au repos ($2\ m_e$) apparaît, mais l'énergie totale (donc la masse maupertuisienne) est conservée.

Pour condenser les formules qui précèdent, et leur donner plus de force (en les généralisant au cas où les vitesses ne sont pas colinéaires), il peut être intéressant de faire intervenir la rapidité sous forme vectorielle ($\vec{w}$) plutôt que réelle ($w$). Il faut alors définir les fonctions vectorielles $e^{\vec{x}}$, $ch\vec{x}$ et $sh\vec{x}$, de la façon suivante :

$$e^{\vec{x}} = 1 + \vec{x} + \frac{\vec{x}^2}{2!} + \frac{\vec{x}^3}{3!} + \frac{\vec{x}^4}{4!} + \frac{\vec{x}^5}{5!} + \frac{\vec{x}^6}{6!} + ...$$

Les puissances de $\vec{x}$ d'exposant pair sont des réels, les puissances d'exposant impair sont des vecteurs parallèles à $\vec{x}$ ; en notant $x$ le module de $\vec{x}$, on peut écrire : $\vec{x}^{2n} = x^{2n}$ et $\vec{x}^{2n+1} = x^{2n}.\vec{x} = x^{2n+1}.\frac{\vec{x}}{x}$.

$$ch\vec{x} = 1 + \frac{\vec{x}^2}{2!} + \frac{\vec{x}^4}{4!} + \frac{\vec{x}^6}{6!} + \frac{\vec{x}^8}{8!} + ... = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ...$$

$$sh\vec{x} = \vec{x} + \frac{\vec{x}^3}{3!} + \frac{\vec{x}^5}{5!} + \frac{\vec{x}^7}{7!} + \frac{\vec{x}^9}{9!} + ... = \left( x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... \right) . \frac{\vec{x}}{x}.$$

On voit donc que $e^{\vec{x}}$ comporte une partie réelle, égale à $ch\vec{x}$, et une partie vectorielle, égale à $sh\vec{x}$.

Si $\vec{x} = \frac{\vec{w}}{c}$, on obtient, pour une particule de masse au repos $m_0$ :

$$m_0c^2 \; e^{\frac{\vec{w}}{c}} = m_0c^2ch\frac{\vec{w}}{c} + m_0c^2sh\frac{\vec{w}}{c} = E + c\vec{p} \; ;$$

$$m_0c^2 \; e^{-\frac{\vec{w}}{c}} = m_0c^2ch\frac{\vec{w}}{c} - m_0c^2sh\frac{\vec{w}}{c} = E - c\vec{p} \; ;$$

$$E = m_0c^2 \; ch\frac{\vec{w}}{c} = m_0c^2 \; \frac{e^{\frac{\vec{w}}{c}} + e^{\frac{-\vec{w}}{c}}}{2} \text{ (nombre réel) ;}$$

$$\vec{p} = m_0c \; sh\frac{\vec{w}}{c} = m_0c \; \frac{e^{\frac{\vec{w}}{c}} - e^{\frac{-\vec{w}}{c}}}{2} \text{ (vecteur).}$$

Lorsqu'on étudie, par exemple, le choc de deux particules de masses au repos $m_1$ et $m_2$, et de rapidités $w_1$ et $w_2$, on peut exprimer la conservation de l'impulsion-énergie par deux équations vectorielles :

$$\begin{cases} m \; ch\left(\frac{\vec{w}}{c}\right) = m_1 \; ch\left(\frac{\vec{w_1}}{c}\right) + m_2 \; ch\left(\frac{\vec{w_2}}{c}\right) \\ \\ m \; sh\left(\frac{\vec{w}}{c}\right) = m_1 \; sh\left(\frac{\vec{w_1}}{c}\right) + m_2 \; sh\left(\frac{\vec{w_2}}{c}\right) \end{cases}$$

qui peuvent se résumer par une équation unique :

$$me^{\frac{\vec{w}}{c}} = m_1e^{\frac{\vec{w_1}}{c}} + m_2e^{\frac{\vec{w_2}}{c}} \; ,$$

ou, si on préfère :

$$me^{-\frac{\vec{w}}{c}} = m_1e^{-\frac{\vec{w_1}}{c}} + m_2e^{-\frac{\vec{w_2}}{c}}.$$

Dans ces deux égalités, le membre de gauche correspond au centre de gravité ; sa masse au repos $m$ et sa rapidité $\vec{w}$ sont faciles à calculer, comme on l'a vu précédemment, en faisant le produit membre à membre, puis le quotient membre à membre, des deux égalités :

$$m^2 = \left(m_1e^{\frac{\vec{w_1}}{c}} + m_2e^{\frac{\vec{w_2}}{c}}\right) . \left(m_1e^{-\frac{\vec{w_1}}{c}} + m_2e^{-\frac{\vec{w_2}}{c}}\right) = m_1^2+m_2^2+2m_1m_2 \; ch\frac{\vec{w_1} - \vec{w_2}}{c} \; ;$$

$$e^{\frac{2\vec{w}}{c}} = \frac{m_1 e^{\frac{\vec{w_1}}{c}} + m_2 e^{\frac{\vec{w_2}}{c}}}{m_1 e^{-\frac{\vec{w_1}}{c}} + m_2 e^{-\frac{\vec{w_2}}{c}}}.$$

Si on pose $M = m\ ch\frac{\vec{w}}{c}$ (masse maupertuisienne) et $\frac{\vec{v}}{c} = th\frac{\vec{w}}{c} = \frac{sh\frac{\vec{w}}{c}}{ch\frac{\vec{w}}{c}}$, on a toujours, bien entendu :

$$\begin{cases} M = M_1 + M_2\ ; \\ \\ M\ \frac{\vec{v}}{c} = M_1\ \frac{\vec{v_1}}{c} + M_2\ \frac{\vec{v_2}}{c}. \end{cases}$$

C'est la traduction classique de l'égalité unique $me^{\frac{\vec{w}}{c}} = m_1 e^{\frac{\vec{w_1}}{c}} + m_2 e^{\frac{\vec{w_2}}{c}}$.

# 17 Petit formulaire sur les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

Définitions :

- cosinus hyperbolique : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- sinus hyperbolique : $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- tangente hyperbolique : $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Propriétés fondamentales :

$cos(0) = 1$

$cos(-x) = cos(x)$

$sin(0) = 0$

$sin(-x) = -sin(x)$

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$ch(0) = 1$

$ch(-x) = ch(x)$

$sh(0) = 0$

$sh(-x) = -sh(x)$

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 2\ cos^2(x) - 1 = 1 - 2\ sin^2(x)$

$sin(2x) = 2\ cos(x).sin(x)$

$cos(x + y) = cos(x).cos(y) - sin(x).sin(y)$

$cos(x - y) = cos(x).cos(y) + sin(x).sin(y)$

$sin(x + y) = sin(x).cos(y) + sin(y).cos(x)$

$sin(x - y) = sin(x).cos(y) - sin(y).cos(x)$

$ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 2\ ch^2(x) - 1 = 1 + 2\ sh^2(x)$

$sh(2x) = 2\ ch(x).sh(x)$

$ch(x + y) = ch(x).ch(y) + sh(x).sh(y)$

$ch(x - y) = ch(x).ch(y) - sh(x).sh(y)$

$sh(x + y) = sh(x).ch(y) + sh(y).ch(x)$

$sh(x - y) = sh(x).ch(y) - sh(y).ch(x)$

Dérivées :

$\frac{d(cos(x))}{dx} = -sin(x)$

$\frac{d(sin(x))}{dx} = cos(x)$

$\frac{d(ch(x))}{dx} = sh(x)$

$\frac{d(sh(x))}{dx} = ch(x)$

Développements en série :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + ...$

$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$

$sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$

$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$

$sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$

Liens entre fonctions trigonométriques, exponentielles et hyperboliques :

$e^{ix} = cos(x) + i\ sin(x)$ (où $i = \sqrt{-1}$)

$e^{-ix} = cos(x) - i\ sin(x)$

$ch(ix) = cos(x)$

$sh(ix) = i\ sin(x)$

$cos(ix) = ch(x)$

$sin(ix) = i\ sh(x)$